# Kansverdelingen

## Geometrische verdeling

*Doorgaan tot je succes(of pech) hebt*

**Voorbeeld**

Je gooit net zo lang met een dobbelsteen tot je zes hebt gegooid
succeskans (p) $^1/_6$; faalkans (q) $^5/_6$
A: aantal pogingen nodig voor succes.

- P(A=10) = $\left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{1}{6}$ of met GR : **GPD(10, $^1/_6$)** ≈ 0,0323
- P(A>10)= $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ of met GR: **1 – GCD(10, $^1/_6$)** ≈ 0,1615
- P(A≤10) = 1– $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ of met GR: **GCD(10, $^1/_6$)** ≈ 0,8385
- Hoe vaak moet je gooien voor minstens 95% kans op succes ?
  - $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}05$ oplossen met tabel, SolvN of log
  - **InvGeo(0.95, $^1/_6$ )** = 17
  - **GCD(X,** $^1/_6$) > 0,95 laten oplossen met tabel of SolvN
- Wat is de verwachtingswaarde van A ?
  - E(A) = 1 + $\frac{5}{6}$ +$\left(\frac{5}{6}\right)^2$+$\left(\frac{5}{6}\right)^3$+$\left(\frac{5}{6}\right)^4$+$\left(\frac{5}{6}\right)^5$+ ..
  - Dit een Meetkundige rij. SMR=1 $\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{\cdots}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}}$ = 6

### Andere voorbeelden

- Contact proberen te krijgen met instelling
- Net zolang herkansen tot je slaagt
- Net zolang een risico nemen tot het mis gaat

# Poissonverdeling

Voor zeldzame gevallen (hoe vaak gebeurt dat nu?)

**Voorbeeld**

Normaal gesproken heeft iemand ongeveer 1 keer per 10 maanden een lekke band. Nu heeft hij/zijn binnen een maand twee lekke banden. Hoe (on) waarschijnlijk is dat ?

Per maand zijn er gemiddeld 0,1 lekke banden. Dit is de verwachtingswaarde, vaak aangegeven met de Griekse letter λ (lambda) en ook wel (op je GR) met de letter μ (mu).
We geven het aantal lekke banden in een maand aan met de stochast L.
Met de GR volgt eenvoudig:

- $P(L=2)$ = PoissonPD(X=2; μ=0.1) ≈ ($4{,}5 \times 10^{-3}$ = ) 0,0045
- $P(L \geq 2) = P(L>1) = 1 - P(L \leq 1)$ = 1 – Poisson**C**D(1, 0.1) ≈ 0,0047 (overschrijdingskans)

De kansen zijn behoorlijk klein, maar niet extreem (ca 1 op 200)

Hoeveel keer een lekke band in één maand is nu echt (zeer) uitzonderlijk ?
[kans < 0,000 001 ($10^{-6}$)]

- Je kunt een tabel laten maken van 1 – Poisson**C**D(X-1, 0.1) en kijken wanneer deze voor het eerst onder $10^{-6}$ komt. Dat is het geval bij X=5.
  Dus 5 (of meer) lekke banden per maand is echt bijzonder.
- Je kunt ook Inverse Poisson gebruiken, maar bedenk wel:
  - Je gebruikt dan de kans Poisson**C**D dus $P(L \leq k)$
    - Je werkt dus met de kans 1– 0,000 001 = 0,999 999
    - Je moet moet bij de uitkomst één optellen:
      - $P(X \leq 4)$ >0,999 999 dus $P(X \geq \mathbf{5})$ < 0,000 001

De **verwachtingswaarde** is (uiteraard) gelijk aan λ (μ)

**Andere voorbeelden**

- Drukfouten in een boek
- Ongelukken op een kruispunt
- Geboortes in een straat (??)

# Binomiale verdeling (Binominal distribution)

Aantal keren raak bij vast aantal pogingen en vaste kans

**Voorbeeld**

Score op test van 40 vierkeuze vragen die willekeurig wordt ingevuld

- Kans op precies 10 goed:
  - P(G=10|n=40;p=1/4) = BPD(10,40,1/4)≈
- Kans op minder dan 5 goed
  - P(G<5) = P(G≤4) = BCD(4,40,1/4)≈
- Kans op minstens 22 goed
  P(G≥22) = 1 – P(≤21) = 1 – BCD(21,40,1/4) ≈
  - P(G≥22) = P(**F≤18|**n=40; p=3/4)=BCD(18,40,**3/4**) ≈
- Welke aantallen goed zijn onwaarschijnlijk laag ? (α=0,01)
  - P(G≤ ?|n=40;p=1/4) < 0,01
    - Met tabel : BCD(X,40,1/4)   X=0..9
    - Met InvBinominal(0.01 ,40, ¼) geeft 4; Maar dan is de kans net groter dan 0,01; Het juiste antwoord is : 0 t/m 3
- Welke aantallen goed zijn onwaarschijnlijk hoog ? (α=0,01)
  - P(G≥ ?|n=40;p=1/4) < 0,01
    - Met tabel:  1 –BCD(X–1,40,1/4)
  - P(**F≤** 40-?|n=40;p=**3/4**) < 0,01
    - Met tabel:  BCD(**40–X**,40,**3/4**)
  - Met invBinom
- Hoeveel vierkeuzevragen moet je stellen om er voor te zorgen dat de kans dat iemand die willekeurig invult meer dan de helft goed heeft, minder is dan 0,01 ?
  - P(X>n/2|n=?;p=1/4)<0,01
    - Tabel maken met 1–BCD(Int(X/2);X,1/4) ; n=16
- Een  schakeling wordt in drievoud uitgevoerd. Wanneer (minstens) 2 van de 3 het doen is er niets aan de hand. Hoe betrouwbaar moet de schakeling zijn om er voor te zorgen dat de kans dat het mis gaat kleiner dan  $10^{-6}$ ( 1 op een miljoen ) is
  - P(G≤1|n=3;p= ?) < $10^{-6}$
    - SolvN(BCD(1,3,X)=$10^{-6}$) geeft   helaas geen oplossing
    - Laten tekenen van BCD(1,3,X) met X 0.99 ..1  en Y 0..$10^{-5}$ lukt wel en met GSolve vind je nu p≈ 0,9995 (naar boven afronden)
- Verwachtingswaarde 10 (1/4 x 40)

# Hypergeometrische verdeling

Aantal keren raak bij vast aantal pogingen en geen vaste kans (maar wel een vaste groep waaruit wordt gekozen, zonder dat dubbelkiezen mogelijk is, “zonder terugleggen”)

**Voorbeeld**

Aantal meisjes in een steekproef van 5 uit een groep bestaande uit 15 meisjes en 10 jongens (dus 25 personen).

- Kans op precies 3 meisjes (= kans op precies 2 jongens):
  - P(M=3)=Hpd(3,5,15,25) = Hpd(2,5,10,25)≈ 0,385
- Kans op minder dan 3 meisjes
  - P(M<3) = P(M≤2) = Hcd(2,5,15,25)≈0,301
- Kans op minstens 2 meisjes (dat is ook de kans op hoogstens 3 jongens
  - P(M≥2) = 1 – P(≤1) = 1 – Hcd(1,5,15,25) ≈ 0,936
  - P(J≤3) = Hcd(3,5,10,25)≈0,936

**Voorbeeld 2**

Uit een partij van  120 potten pindakaas wordt een steekproef genomen van 10 stuks Alle 10 potten zijn in orde. Wat kun je zeggen over het aantal potten dat niet in orde ligt.

- Noem het aantal potten pindakaas  dat niet in orde is x.
- We gaan na bij welke waarden van x deze uitkomst (20 van de 20 goed) erg onwaarschijnlijk is (α=0,01) :   Hpd(0,20,X,120) <0,01
- Maak een tabel voor x=0 t/m (bijv) 50
  - Vanaf 23 potten geldt dat de uitkomst erg onwaarschijnlijk is
  - Conclusie: vermoedelijk (α=0,01) hoogstens 22 potten die niet in orde zijn