

Hoofdstuk 8 - Periodieke functies

bladzijde 218

V-1a Na 2 seconden

b $\frac{60}{2} = 30$ slagen per minuut

c ca. 0,44 millivolt

V-2a Ja, met periode 12

Nee

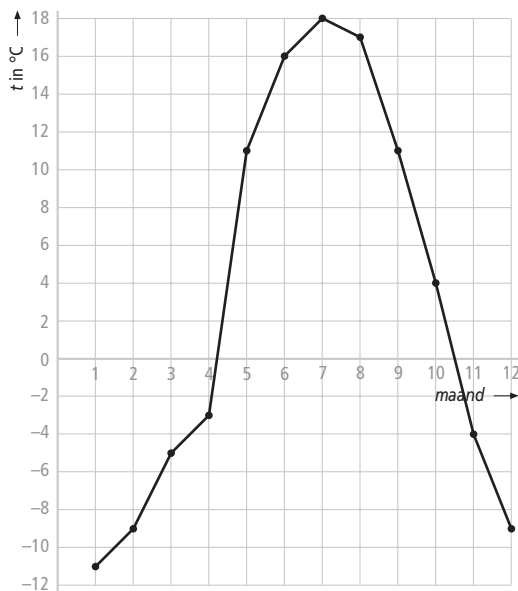
Mogelijk, met periode 12

b $y = 2$ en amplitude 3

-

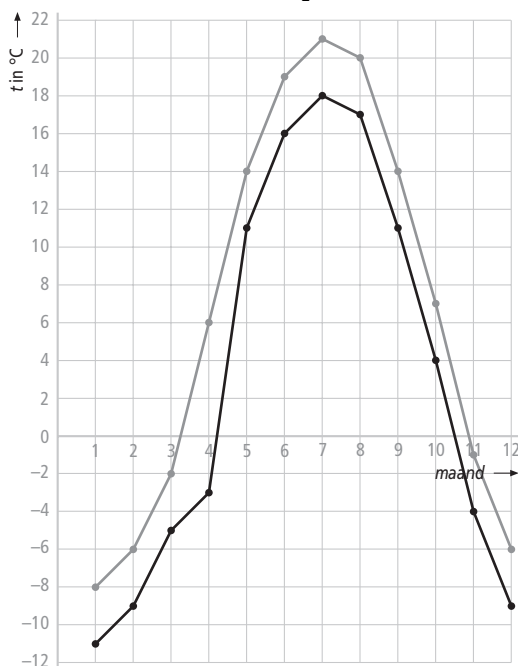
$y = -2$ en amplitude 2

V-3a



Evenwichtsstand is $T = 3\frac{1}{2}$ en de amplitude is $14\frac{1}{2}$

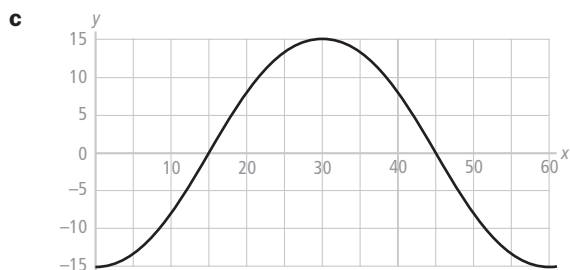
b



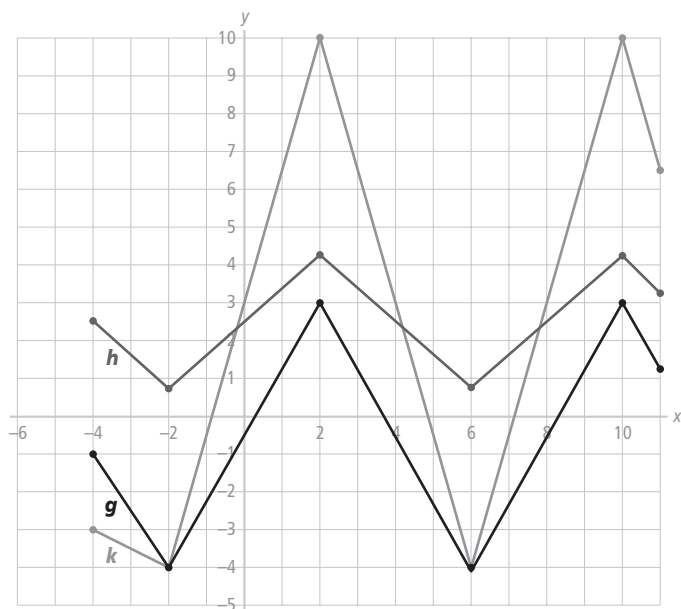
bladzijde 219

V-4a Na $\frac{1}{4} \times 60 = 15$ seconden; na $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ seconden

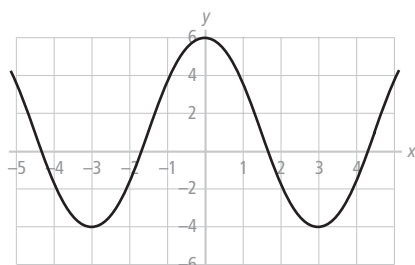
b 20 meter, de amplitude



V-5abc



V-6 De evenwichtsstand is $y = 1$ en het amplitude is 5. Omdat de grafiek door $(0, 6)$ gaat en de periode 6 is, gaat de grafiek dus in het punt $(1\frac{1}{2}, 1)$ door de evenwichtsstand en heeft hij in het punt $(3, -4)$ een minimum en gaat vervolgens in $(4\frac{1}{2}, 1)$ weer door de evenwichtsstand. Naar links toe kun je dat op dezelfde manier doen.

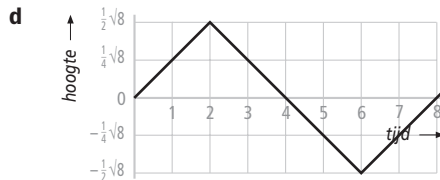


bladzijde 220

1a Voor elke zijde zijn 2 seconden nodig dus totaal 8 seconden.

b De rechte lijnstukken die het vierkant vormen en de constante snelheid.

- c Een diagonaal heeft lengte $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ dus ligt het hoogste punt op hoogte $\sqrt{2}$
 Voor $t = 0$ is de hoogte 0.
 Voor $t = 1$ is de hoogte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 Voor $t = 2$ is de hoogte $\sqrt{2}$
 Voor $t = 3$ is de hoogte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 Voor $t = 4$ is de hoogte 0.

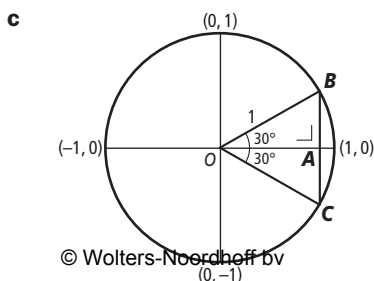


- 2a De omtrek is $2\pi r$ met $r = 1$
 Dus is hier de omtrek 2π .
- b 2π seconden
- c 2π seconden voor de hele cirkel dus 360°
 Dus π seconden voor 180° .
- d $\frac{1}{4}$ deel van 180° dus 45°
 $1\frac{1}{6} \times 180^\circ = 210^\circ$
- e 120° is $\frac{2}{3}$ deel van 180° en dus $120^\circ = \frac{2}{3}\pi$

bladzijde 221

- 3a Neem X van 0 tot 360° (Via Mode instellen op Degree) en neem Y van $-1\frac{1}{2}$ tot $1\frac{1}{2}$
 Plot de functie $Y1 = \sin X$
- b $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$ en $450^\circ + 360^\circ = 810^\circ$
- c 360° komt overeen met één rondgang van de stip over de cirkel.
- d $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
 $360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$
 $150^\circ + 360^\circ = 510^\circ$
 $390^\circ + 360^\circ = 750^\circ$
- 4a $35^\circ - 360^\circ = -325^\circ$
 $(180^\circ - 35^\circ) - 360^\circ = -215^\circ$
- b $-(180^\circ - 123^\circ) = -57^\circ$
 $-57^\circ + 360^\circ = 303^\circ$
 $-123^\circ + 360^\circ = 237^\circ$
 $237^\circ + 360^\circ = 597^\circ$

- 5a $\sin \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{h}{1} = h$
- b $\cos \angle AOB = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{1} = OA$

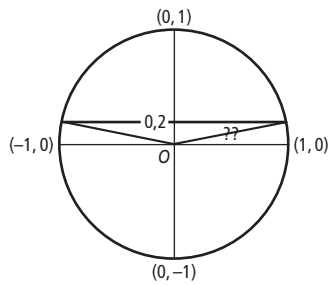


- d Driehoek OBC is gelijkbenig met $\angle COB = 60^\circ$, dus is de driehoek gelijkzijdig met zijde 1.

Omdat dan $AB = \frac{1}{2}$ geldt $\sin 30^\circ = AB = \frac{1}{2}$

- e Als je spiegelt in de y-as zie je dat ook $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$
Met veelvouden van 360° erbij of eraf krijg je dan:
 -330° ; -210° ; 30° ; 150° ; 390° ; 510°

6a



- b Met $\sin^{-1} 0,2$ vind je $11,54\dots$ graden. Afgerond: 12 graden.
c $180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$
 $12^\circ + 360^\circ = 372^\circ$
 $168^\circ - 360^\circ = -192^\circ$
 $372^\circ + 360^\circ = 732^\circ$
 $168^\circ + 360^\circ = 528^\circ$

bladzijde 222

7a $\frac{90}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$

b $\frac{45}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi$

$\frac{60}{360} \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi$

$\frac{210}{360} \cdot 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi$

c $\frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ$

8a	graden	0	30	45	57,296	60	90	180
	radialen exact	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	1	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π
	radialen benaderd	0	0,524	0,785	1	1,047	1,571	3,142

bladzijde 223

9	β in $^\circ$	5,73	15	60	114,6	107	120	171,9
	β in rad	0,1	0,26	$\frac{1}{3}\pi$	2	1,87	$\frac{2}{3}\pi$	3

- 10 Zet je rekenmachine eerst op Radialen!

a $\sin \frac{1}{4}\pi \approx 0,707$

b $\sin 1\frac{1}{6}\pi \approx -0,500$

c $\sin 4\frac{1}{2}\pi = 1,000$

d $\sin(-\frac{2}{3}\pi) \approx -0,866$

11a $\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

b $\frac{1}{6}\pi - 2\pi = -1\frac{5}{6}\pi$

$$\frac{1}{6}\pi + 2\pi = 2\frac{1}{6}\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2\pi = 2\frac{5}{6}\pi$$

$$2\frac{1}{6}\pi + 2\pi = 4\frac{1}{6}\pi$$

12a $\sin x = 0,1$

$$x = \sin^{-1} 0,1$$

$$x \approx 0,10 \text{ en } x \approx \pi - 0,10 \approx 3,04$$

b $\sin x = -0,9$

$$x = \sin^{-1}(-0,9)$$

$$x \approx -1,12 \text{ (ligt buiten het toegestane interval)}$$

$$x \approx -1,12 + 2\pi \approx 5,16 \text{ en } x \approx \pi - (-1,12) \approx 4,26$$

c $\sin x = -1$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi$$

13a Op $[0, 2\pi]$ zijn er twee oplossingen.

Dus op $[0, 10\pi]$ zijn er 10 oplossingen.

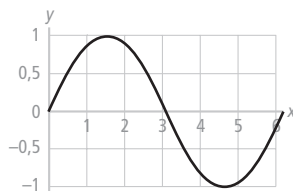
b Op $[0, 2\pi]$ zijn er twee oplossingen.

Dus op $[0, 200\pi]$ zijn er 200 oplossingen.

c Geen oplossingen als $c > 1$ of als $c < -1$

bladzijde 224

14a



Neem X van 0 tot 2π en Y van -2 tot 2.

b

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π	$2\frac{1}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0

Toppen: $(\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$; $(2\frac{1}{2}\pi, 1)$; etc.

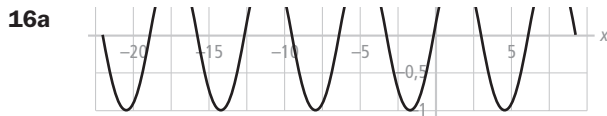
Nulpunten: $(0, 0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$; $(3\pi, 0)$; ...etc.

15a De verticale assen van symmetrie zijn $x = 2\frac{1}{2}\pi$ en $x = 101\frac{1}{2}\pi$ ($= 1\frac{1}{2}\pi + 100\pi$)

b De nulpunten zijn punt van symmetrie. Dus $(3\pi, 0)$, $(34\pi, 0)$ en $(-53\pi, 0)$

c Omdat $\frac{1000}{2} = 500$ passen er 500 perioden in dit interval.

bladzijde 225



5 perioden

- b** Maximum 1 voor $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 2\frac{1}{2}\pi$, $x = -1\frac{1}{2}\pi$, $x = -3\frac{1}{2}\pi$, $x = -5\frac{1}{2}\pi$

Minimum -1 voor $x = 1\frac{1}{2}\pi$, $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = -2\frac{1}{2}\pi$, $x = -4\frac{1}{2}\pi$, $x = -6\frac{1}{2}\pi$

- c** Het verschil is steeds 2π in zowel de rij van de maxima als de minima.

17a $\sin x = 0,6$

$x = \sin^{-1} 0,6$

$x \approx 0,644$

- b** $x \approx \pi - 0,644 \approx 2,500$

$\sin 2,500 = 0,59847\dots$

- c** $6,92 \approx 0,64 + 2\pi$ en $-5,94 \approx 0,64 - 2\pi$

18a $\sin x = -0,1$

$x = \sin^{-1}(-0,1)$

$x \approx -0,100$

$x \approx -0,10 + 2\pi \approx 6,18$ en $x = \pi - (-0,10) \approx 3,24$

- b** Bedenk dat $[4, 11] \approx [12,57; 34,56]$

$x = 3,24 + 4\pi \approx 15,81$

$x = 3,24 + 6\pi \approx 22,09$

$x = 3,24 + 8\pi \approx 28,37$

$x \approx 6,18 + 4\pi \approx 18,75$

$x \approx 6,18 + 6\pi \approx 25,03$

$x \approx 6,18 + 8\pi \approx 31,31$

- c** $\sin 1\frac{1}{2}\pi = -1$ dus zijn de oplossingen

$x = 1\frac{1}{2}\pi$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + 2\pi = 3\frac{1}{2}\pi$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + 4\pi = 5\frac{1}{2}\pi$

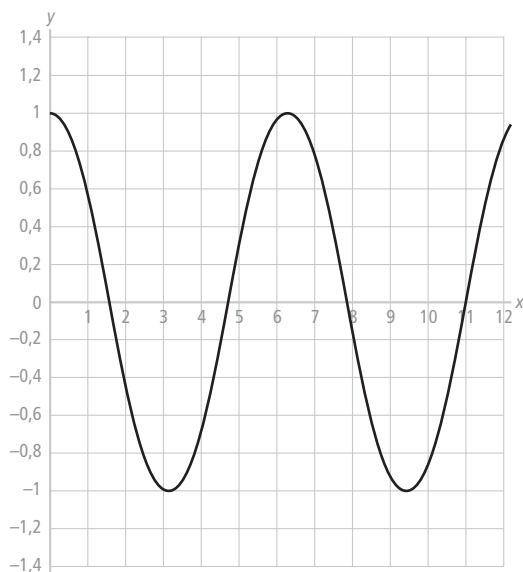
$x = 1\frac{1}{2}\pi + 6\pi = 7\frac{1}{2}\pi$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + 8\pi = 9\frac{1}{2}\pi$

- d** Plot $Y1 = \sin X$ en $Y2 = 0,2$

De optie CALC, Intersect geeft dan $x \approx 0,20$ en $x \approx 2,94$

De overige oplossingen zijn dan $x \approx 0,20 + 2\pi \approx 6,48$ en $x \approx 2,94 + 2\pi \approx 9,22$

bladzijde 226**19a**

De vorm is dezelfde alleen is er sprake van een horizontale verschuiving.

b 2π **c** $\pm \frac{1}{2}\pi, \pm 1\frac{1}{2}\pi, \pm 2\frac{1}{2}\pi, \pm 3\frac{1}{2}\pi, \pm 4\frac{1}{2}\pi, \pm 5\frac{1}{2}\pi, \dots$ **20a** Bart heeft gelijk.

b $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts of $2\frac{1}{2}\pi$ naar rechts of
 $1\frac{1}{2}\pi$ naar links of $3\frac{1}{2}\pi$ naar links of

21a $2\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{2}{3}\pi$ **b** $\frac{1}{3}\pi + 10\pi = 10\frac{1}{3}\pi$

$$1\frac{2}{3}\pi + 8\pi = 9\frac{2}{3}\pi$$

$$1\frac{2}{3}\pi + 10\pi = 11\frac{2}{3}\pi$$

bladzijde 227**22a** 4 perioden

b De assen van symmetrie zijn de verticale lijnen door de toppen.
 $x = 0, x = \pi, x = 2\pi, x = 3\pi$ en $x = 4\pi$

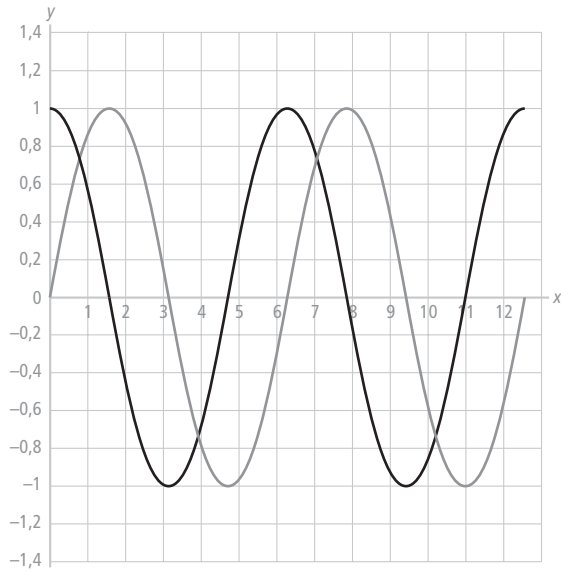
c $x = \frac{1}{2}\pi, x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\frac{1}{2}\pi$ **23a** Plot $Y1 = \cos X$ en $Y2 = -0,2$

CALC, Intersect geeft $x \approx 1,77$ of $x \approx -1,77$

b Symmetrie in de y-as.**c** $10\pi + 1,77 \approx 33,19$ of $12\pi - 1,77 \approx 35,93$

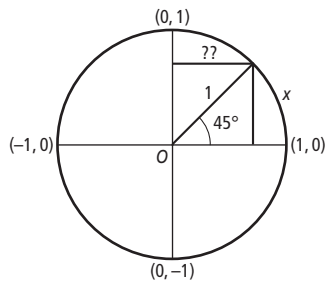
d Op elk interval met lengte 2π zijn er twee oplossingen.
 Dus zijn er 100 oplossingen op $[100\pi, 200\pi]$.

24a



4 snijpunten

b



$$\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{PQ}{OP} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{OQ}{OP} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

c

$$\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi, 2\frac{1}{4}\pi \text{ en } 3\frac{1}{4}\pi$$

25a

$$\cos x = -0,67$$

$$\cos x = \cos 0,836585 \dots$$

$$x \approx 0,837 \text{ of } x \approx 2\pi - 0,837 \approx 5,447 \text{ of } x \approx 2\pi + 0,837 \approx 7,120$$

b

Geen oplossing want $\cos x \geq -1$

c

$$\sin x = -0,99$$

$$\sin x \approx \sin -1,4293$$

Gebruik symmetrie om $x \approx 11,137$ en $x \approx 10,854$ te vinden.

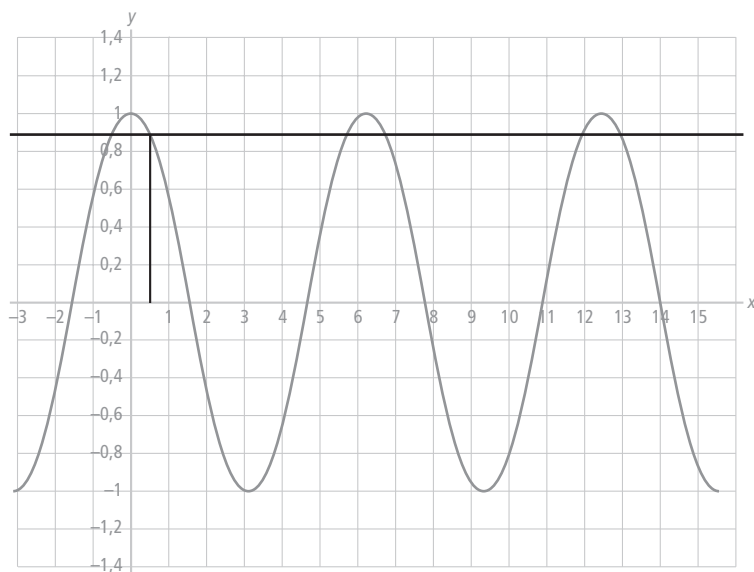
d

$$\cos x = -0,95$$

$$\cos x = \cos 2,824$$

Gebruik symmetrie om $x \approx 159,904$, $x \approx 166,187$, $x \approx 160,539$ en $x \approx 166,822$ te vinden.

26a



b $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\cos x = \cos \frac{1}{6}\pi$$

$$\cos x = \cos \frac{1}{6}\pi$$

$$x = \pm \frac{1}{6}\pi \pm \text{veelvoud van } 2\pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi, x = 2\frac{1}{6}\pi, x = 4\frac{1}{6}\pi$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi, x = 1\frac{5}{6}\pi, x = 3\frac{5}{6}\pi$$

c $\cos x = -1$

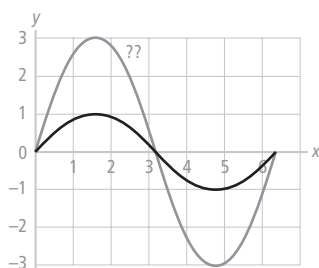
$$\cos x = \cos \pi$$

$$x = \pm \pi \pm \text{veelvoud van } 2\pi$$

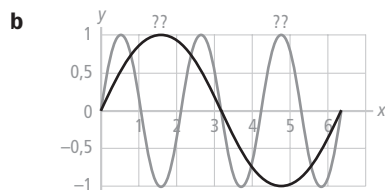
$$x = -\pi, x = \pi, x = 3\pi, x = 5\pi$$

bladzijde 228

27a



De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door de afstand van elk punt op de grafiek van f tot de x -as met 3 te vermenigvuldigen.



De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door alle afstanden van punten van f tot de y -as door 3 te delen.

c

x	$f(x)$	$h(x)$
0	0,000	0,000
$\frac{1}{12}\pi$	0,259	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{6}\pi$	0,500	1,000
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,000
$\frac{5}{12}\pi$	0,966	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1,000	-1,000
$\frac{7}{12}\pi$	0,966	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,000
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	0,500	1,000
$\frac{11}{12}\pi$	0,259	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
π	0,000	0,000

d $f(\frac{1}{4}\pi) = \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $h(\frac{1}{12}\pi) = \sin(3 \cdot \frac{1}{12}\pi) = \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$f(\frac{1}{2}\pi) = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$ en $h(\frac{1}{6}\pi) = \sin(3 \cdot \frac{1}{6}\pi) = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$

e $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

bladzijde 229

- 28a** Amplitude f is 1
Amplitude g is 1
Amplitude h is $1\frac{1}{2}$
Periode f is 2π

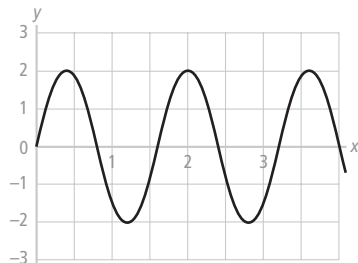
Periode g is $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$

Periode h is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

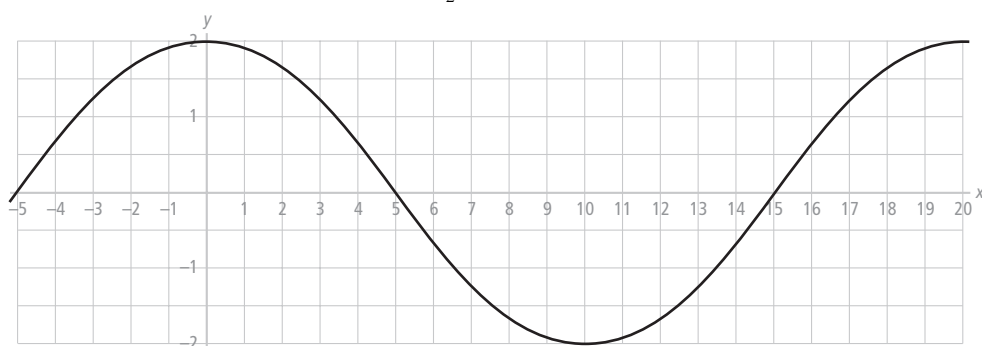
- 29a** De afstanden tot de y -as worden b keer zo klein. Ook de periode wordt b keer zo klein.

- b** De afstanden tot de y -as worden $\frac{1}{b}$ keer zo groot. Ook wordt de periode $\frac{1}{b}$ keer zo groot.

c	b	2	π	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}\pi$
	periode	π	2	3π	10

30a

Amplitude van f is 3 en de periode is $\frac{1}{2}\pi$.

b

Amplitude g is 2 en de periode is $\frac{2\pi}{0,1\pi} = 20$

31a Amplitude f is 1 en periode f is $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

Amplitude g is 3 en periode g is $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Amplitude h is 2 en periode h is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

b

$$f(x) = \cos 5x$$

$$g(x) = 3 \sin 2x$$

$$h(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x$$

32a Dit komt overeen met één periode, dus $\frac{2\pi}{0,506} \approx 12,41736\dots$

Dus met 12 uur en $0,41736 \times 60 \approx 25$ minuten.

b Plot de grafieken van $Y1 = 1,85 \sin 0,506X$ en $Y2 = 1,20$

CALC, Intersect geeft 1,39 en 4,81

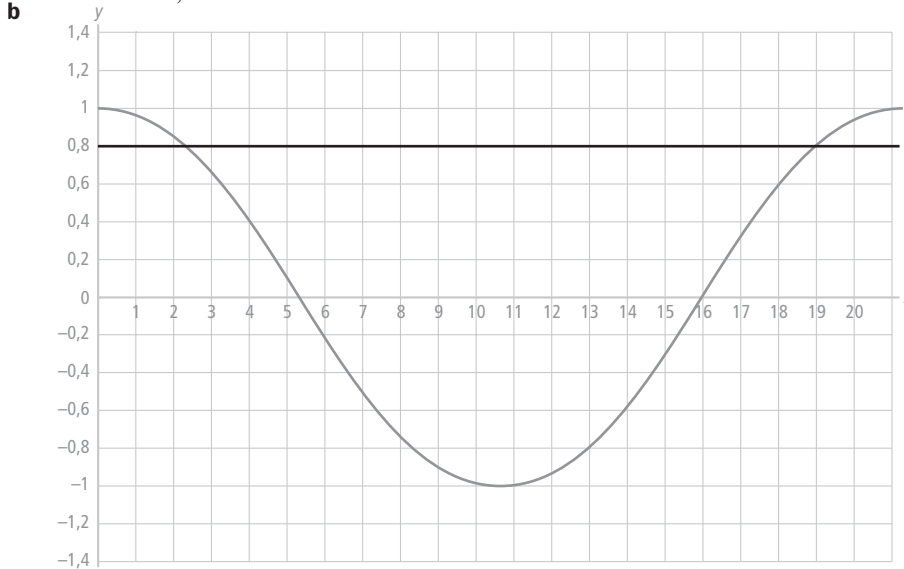
Het verschil is dan 3,42.

Dus 3 uur en $0,42 \times 60 \approx 25$ minuten

c Alleen de evenwichtsstand komt 0,6 hoger te liggen.

bladzijde 230

33a Periode $\frac{2\pi}{0,3} = 6\frac{2}{3}\pi$



Twee oplossingen.

c CALC, Intersect geeft $x \approx 2,145$ en $x \approx 18,799$

d $\frac{100\pi}{6\frac{2}{3}\pi} = 15$

e 30 oplossingen

f $\langle 2,15; 18,80 \rangle$

bladzijde 232

34a $\cos \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$

$\cos \frac{1}{2}x = \cos \frac{2}{3}\pi$

$\frac{1}{2}x = \pm \frac{2}{3}\pi \pm \text{veelvoud van } 2\pi$

$x = \pm \frac{4}{3}\pi \pm \text{veelvoud van } 4\pi$

Alleen $x = \frac{4}{3}\pi$ voldoet.

b Plot de grafieken van $Y1 = \cos 0,5X$ en $Y2 = -0,5$

Aflesen en het resultaat van de vorige opdracht gebruiken geeft $[-\pi, 1\frac{1}{3}\pi]$.

c Plot $Y1 = \cos 0,5X$ en lees af: $\langle \pi, 2\pi \rangle$

35a Plot $Y1 = \cos 2X$ en $Y2 = 0,75$

CALC, Intersect geeft o.a. $x \approx 0,3614$

Met symmetrie en periode π en aflesen vind je de intervallen:

$[0; 0,36]$, $\langle 2,78; 3,50 \rangle$ en $\langle 5,92; 2\pi \rangle$

b Plot $Y1 = \cos(X/3)$ en $Y2 = -0,25$

CALC, Intersect geeft $x \approx 5,470$

Met symmetrie en periode 6π en aflesen vind je $\langle 5,47; 2\pi \rangle$

c Voor elke waarde van x geldt dat $\sin 0,4x < 1\frac{1}{3}$

Dus is de oplossing $[0, 2\pi]$.

36a De grafiek van f ontstaat uit die van g door vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y -as gevolgd door een vermenigvuldiging met 6 ten opzichte van de x -as.

b De nulpunten van $y = \cos x$ zijn $\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$, $2\frac{1}{2}\pi$, $3\frac{1}{2}\pi$,
Als je deelt door 2 dan krijg je: $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 1\frac{1}{4}\pi$, $x = 1\frac{3}{4}\pi$

c $6\cos 2x = -6$

$$\cos 2x = -1$$

$$\cos 2x = \cos \pi$$

$$2x = \pm \pi \pm \text{veelvoud van } 2\pi$$

$$x = \pm \frac{1}{2}\pi \pm \text{veelvoud van } \pi$$

Op $[0, 2\pi]$ geeft dit $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$

37a $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

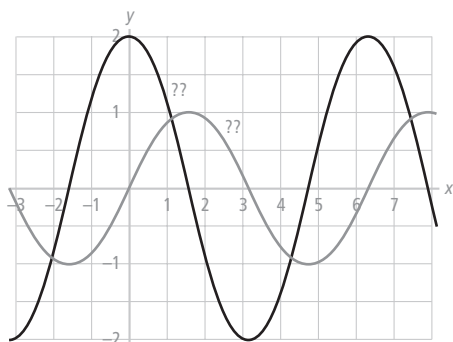
b Dan moet $\frac{2\pi}{b} = 1$, dus $b = 2$

c Dan moet $\frac{2\pi}{b} = 10\pi$, dus $b = 0,2$

d De vergelijking $\sin 5x = \frac{1}{30}$ heeft twee oplossingen per periode.
De periode is $0,4\pi$

Op het interval $[0, 100\pi]$ zijn er $\frac{100\pi}{0,4\pi} \times 2 = 500$ oplossingen.

38a



b $\sin x = 0,8$

$$\sin x \approx \sin 0,9273$$

$$\sin x \approx \sin 0,9273$$

$$x \approx 0,93$$

Met symmetrie vind je ook de oplossingen $x \approx 7,21$ en $x \approx 2,21$

c Plot $Y1 = \cos X$ en $Y2 = 0,3$

CALC, Intersect en gebruik van symmetrie en periode geeft:

$$x \approx -1,27, x \approx 1,27, x \approx 5,02 \text{ en } x \approx 7,55$$

Aflezen geeft vervolgens de intervallen $[-3; -1,27]$, $[1,27; 5,02]$ en $[7,55; 8]$.

d Plot $Y1 = \sin X$ en $Y2 = 2 \cos X$

CALC, Intersect en aflezen geeft:

$$\langle -2,03; 1,11 \rangle \text{ en } \langle 4,25; 7,39 \rangle$$

39a $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$

b Plot $Y1 = \sin(2\pi X / 3)$ en $Y2 = 0,375$

CALC, Intersect en symmetrie en periode 3 geeft:

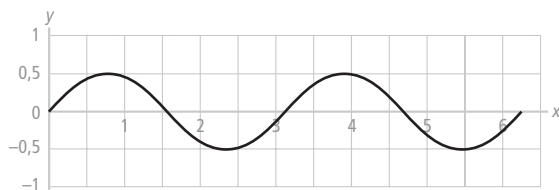
$$t \approx 0,18; t \approx 1,32; t \approx 3,18; t \approx 4,32$$

- c Plot $Y1 = \sin(2\pi X / 3)$ en $Y2 = 0,75$
 CALC, Intersect geeft $t \approx 0,405$ en $t \approx 1,095$
 Verder is $1,095 - 0,405 = 0,690$
 De uitwijking kan naar links en naar rechts meer dan 6 cm afwijken.
 Per periode is de afwijking gedurende $2 \times 0,690 = 1,38$ seconde groter dan 6 cm.
 Dit is $\frac{1,38}{3} \times 100\% = 46\%$ van de periode.
- d $\frac{2\pi}{b} = 0,8 \Rightarrow b = 2\frac{1}{2}\pi$
 $u(t) = 8 \sin 2\frac{1}{2}\pi t$

bladzijde 232

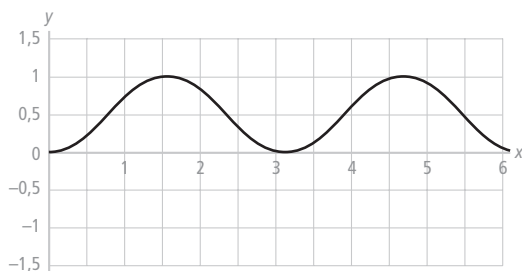
- 40a Amplitude $a = 2$ en periode $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$
- b $2 \sin \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{2}$
 $\sin \frac{1}{2}\pi x = 0,25$
 $\sin \frac{1}{2}\pi x \approx \sin 0,253$
 $\frac{1}{2}\pi x \approx 0,253 \pm \text{veelvoud } 2\pi$ of $\frac{1}{2}\pi x \approx \pi - 0,253 \pm \text{veelvoud } 2\pi$
 $x \approx 0,16 \pm \text{veelvoud van } 4$ of $x \approx 1,84 \pm \text{veelvoud van } 4$
 Plotten en aflezen op $[0, 8]$ geeft de intervallen: $[0; 0,16)$, $(1,84; 4,16)$ en $(5,84; 8]$
- c I: $a = 5$ en $1\frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 3\pi \Rightarrow \text{periode} = \frac{12}{5}\pi$ en $b = \frac{2\pi}{\frac{12}{5}\pi} =$
 II: $a = 5$ en $\frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 3\pi \Rightarrow \text{periode} = 12\pi$ en $b = \frac{2\pi}{12\pi} =$
 III: $a = -5$ en $\frac{3}{4} \cdot \text{periode} = 3\pi \Rightarrow \text{periode} = 4\pi$ en $b = \frac{2\pi}{4\pi} =$

41a



Periode π en amplitude $\frac{1}{2}$

- b Een nulpunt van p en q is ook nulpunt van f .
- c $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$
- d

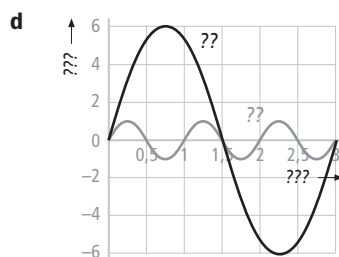


- e Omdat $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ de maximale waarde $\frac{1}{2}$ heeft.
- f $\frac{1}{2} \sin 2x = 0,1$
 $\sin 2x = 0,2$
 $2x \approx 0,201 \pm \text{veelvoud van } 2\pi$ of $2x \approx \pi - 0,201 \pm \text{veelvoud van } 2\pi$
 $x \approx 0,10 \pm \text{veelvoud van } \pi$ of $x \approx 1,47 \pm \text{veelvoud van } \pi$

- g** $(\sin x)^2 = 1$
 $\sin x = 1$ of $\sin x = -1$
 $x = \frac{1}{2}\pi \pm \text{veelvoud van } 2\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi \pm \text{veelvoud van } 2\pi$
 Je kunt deze twee rijen oplossingen combineren tot $x = \frac{1}{2}\pi \pm \text{veelvoud van } \pi$

bladzijde 233

- 42a** De periode is $6 \times 0,5 = 3$ ms
 De amplitude is $4 \times 1,5 = 6$ Volt
 De frequentie 333,3 Hz
- b** $10 \times 0,2 = 2$ ms en dus is er $\frac{2}{3}$ -de deel te zien.
- c** Je moet 3 ms verdelen over 10 hokjes, dus 0,3 ms per hokje.



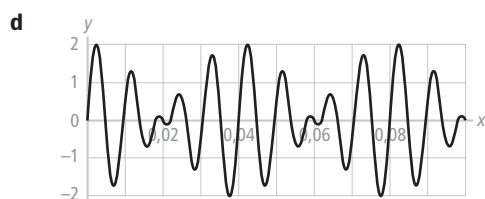
- e** Zie figuur hierboven.

1000 Hz betekent dat de periode $\frac{1}{1000} = 0,001$ seconde is, dus 1 ms.

- 43a** 100 trillingen per seconde dus is de periode 0,01 en is $b = \frac{2\pi}{0,01} = 200\pi$

$$f(t) = \sin 200\pi t$$

- b** De periode is $\frac{2\pi}{250} = \frac{1}{125}\pi$ en dus is de frequentie 125.
- c** $k(t) = \sin 1200\pi t$



De maximale waarde 1,97 vind je met TRACE.

- e** De periode van f is $\frac{1}{100}$ en de periode van g is $\frac{1}{125}$
 De periode van de som is het kleinste gehele veelvoud van deze beide perioden.
 Maak twee rijen, veelvoud van $\frac{1}{100}$ en van $\frac{1}{125}$ dan zie je dat $\frac{4}{100} = 0,04$ en $\frac{5}{125} = 0,04$ als eerste in beide rijen gemeenschappelijk voorkomt. Dus is 0,04 de periode van h .
- f** De periode van h is het KGV (kleinste gemeenschappelijke veelvoud) van de perioden van f en g .

bladzijde 234

- I-1a** Amplitude is 1 en de periode is 2π
De evenwichtsstand is $y = 0$
- b** $(-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$
- c** Maximale waarde 1 voor $x = -1\frac{1}{2}\pi$ en voor $x = \frac{1}{2}\pi$
Minimale waarde -1 voor $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$
- d** Amplitude 2 en periode 2π
De evenwichtsstand is $y = 0$
 $(-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$
Maximale waarde 2 voor $x = -1\frac{1}{2}\pi$ en voor $x = \frac{1}{2}\pi$
Minimale waarde -2 voor $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$
- e** De amplitude van g is twee keer de amplitude van f ,
de perioden zijn gelijk en bij de toppen horen dezelfde x -waarden.
Ook zijn de nulpunten dezelfde.
- f** Alleen de amplitude verandert, wordt groter. Daardoor liggen de toppen verder van de x -as.
- g** Alleen de amplitude verandert, wordt kleiner. Daardoor liggen de toppen dichterbij de x -as.
- I-2a** Amplitude h is 1, de periode is π en de evenwichtsstand is $y = 0$
- b** $(-2\pi, 0), (-1\frac{1}{2}\pi, 0), (-\pi, 0), (-\frac{1}{2}\pi, 0), (0, 0), (\frac{1}{2}\pi, 0), (\pi, 0), (1\frac{1}{2}\pi, 0)$ en $(2\pi, 0)$
- c** Maximum 1 voor $x = -1\frac{3}{4}\pi, x = -\frac{3}{4}\pi, x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$
Minimum -1 voor $x = -1\frac{1}{4}\pi, x = -\frac{1}{4}\pi, x = \frac{3}{4}\pi$ en $x = 1\frac{3}{4}\pi$
- d** De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door horizontale krimp met factor 2.
Alle afstanden van de punten tot de y -as worden twee keer zo klein.
- e** De krimp is sterker naarmate b toeneemt.
- f** Dan wordt de grafiek horizontaal uitgerekt met factor $\frac{1}{b} > 1$

bladzijde 235

- I-3a** Amplitude 1 en periode $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$
- b** Amplitude 8 en periode 2π
- c** Amplitude 3 en periode $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
- d** Amplitude $1\frac{1}{2}$ en periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
- e** Amplitude 2 en periode $\frac{2\pi^2}{10\pi} = \frac{1}{5}$
- f** Amplitude 0,3 en periode $\frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$
- I-4a**
- 1) $y = \sin 2x$
 - 2) $y = 3 \cos x$
 - 3) $y = \sin \frac{1}{2}x$
 - 4) $y = 4 \sin \frac{1}{4}x$
 - 5) $y = \cos \pi x$
 - 6) $y = -4 \cos 3x$

- 7) $y = -2 \sin \frac{1}{2}x$
 8) $y = 17 \cos 0,2x$
 9) $y = 3 \sin 4x$
 10) $y = 0,15 \sin \frac{1}{6}\pi x$

I-5a $g(x) = -\sin x$

b $h(x) = 5 \sin \frac{1}{2}\pi x$

De amplitude is dan 5 en de periode is dan $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$

I-6a Dit komt overeen met één periode, dus $\frac{2\pi}{0,506} \approx 12,41736\dots$

Dus met 12 uur en $0,41736 \times 60 \approx 25$ minuten.

b Plot de grafieken van $Y1 = 1,85 \sin 0,506X$ en $Y2 = 1,20$
 CALC, Intersect geeft 1,39 en 4,81

Het verschil is dan 3,42.

Dus 3 uur en $0,42 \times 60 \approx 25$ minuten

c Alleen de evenwichtsstand komt 0,6 hoger te liggen.

I-7a Vermenigvuldig alle afstanden tot de x -as met 2 en spiegel in de x -as.

b Spiegelen in de y -as.

c De grafiek van $y = \cos x$ is symmetrisch in de y -as dus geldt $\cos(-x) = \cos x$

De grafiek van $y = \sin x$ is puntsymmetrisch in $(0, 0)$ dus geldt $\sin(-x) = -\sin x$

bladzijde 238

T-1a Controleer of aan de stelling van Pythagoras wordt voldaan:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

b $\sin 45^\circ = \frac{AB}{OB} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Teken in de eenheidscirkel de genoemde hoeken. Door te spiegelen in de assen kun je dan de volgende waarden vinden:

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin 225^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin(-45^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

T-2	α in graden	45	125	240	229	600	72
	α in radialen	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{25}{36}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	4	$3\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{4}$

$$125^\circ = \frac{125}{180}\pi = \frac{25}{36}\pi$$

$$1\frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3} \times 180^\circ = 240^\circ$$

$$4 = \frac{4}{\pi} \times 180^\circ \approx 229,2^\circ$$

$$600^\circ = \frac{600}{180}\pi = 3\frac{1}{3}\pi$$

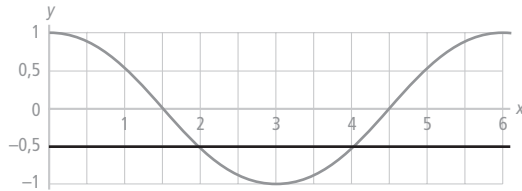
$$1\frac{1}{4} = \frac{1,25}{\pi} \times 180^\circ \approx 71,6^\circ$$

T-3a Gebruik symmetrie om naast $x = \frac{1}{3}\pi$ ook $x = \frac{2}{3}\pi$ te vinden

b $x = \pi + \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$ en $x = \pi + \frac{2}{3}\pi = 1\frac{2}{3}\pi$;

c $x = 2\pi + \frac{1}{3}\pi = 2\frac{1}{3}\pi$ en $x = 2\pi + \frac{2}{3}\pi = 2\frac{2}{3}\pi$ en $x = 4\pi + \frac{1}{3}\pi = 4\frac{1}{3}\pi$ en $x = 4\pi + \frac{2}{3}\pi = 4\frac{2}{3}\pi$

T-4a



b $(0, 1)$ en $(\pi, -1)$

c $(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2})$ en $(1\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{2})$

T-5a f : amplitude 1 en $5 \times \text{periode} = 4\pi \Rightarrow \text{periode} = \frac{4}{5}\pi$

g : amplitude $2\frac{1}{2}$ en periode 2π

h : amplitude 1 en periode 4π

b $f(x) = \sin 2\frac{1}{2}x$ want $\frac{2\pi}{\frac{4}{5}\pi} = 2\frac{1}{2}$
 $g(x) = -2\frac{1}{2}\sin x$
 $h(x) = \cos \frac{1}{2}x$

bladzijde 239

T-6a Plot $Y1 = \sin 0,5X$ en $Y2 = 0,8$

CALC, Intersect en symmetrie geeft:

$x \approx 1,85$ en $x \approx 4,43$

b Plot $Y1 = \cos 2X$ en $Y2 = 2/3$

CALC, Intersect en symmetrie geeft:

$x \approx -0,42$, $x \approx -2,72$, $x \approx 0,42$, $x \approx 2,72$, $x \approx 3,56$ en $x \approx 5,86$

c Plot $Y1 = \sin 1,5X$ en $Y2 = -0,5$

CALC, Intersect en symmetrie en aflezen van de ongelijkheid geeft:

$\langle -1,75; -0,35 \rangle$ en $\langle 2,44; 3,84 \rangle$

d Plot $Y1 = \sin X$ en $Y2 = \cos 2X$

CALC, Intersect en symmetrie en aflezen van de ongelijkheid geeft:

$\langle 0,52; 2,62 \rangle$

T-7a Amplitude 5 en periode $\frac{1}{20} = 0,05$

b $\frac{2\pi}{0,05} = 40\pi$

$u(t) = 5 \sin 40\pi t$

c Plot $Y1 = 5 \sin 40\pi X$ en $Y2 = 0,8$

CALC, Intersect en symmetrie geeft:

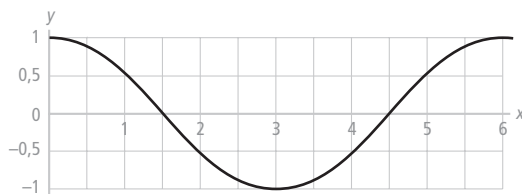
$t_1 \approx 0,0074$; $t_2 \approx 0,0176$

Bedenk dat de uitwijking naar beide kanten meer dan 4 mm kan zijn.

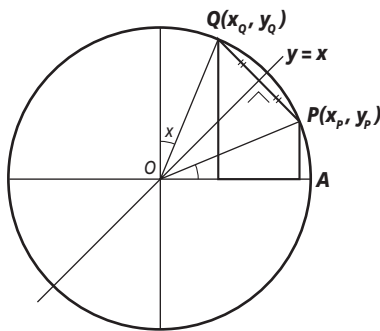
Uit $2 \times \frac{t_2 - t_1}{\text{periode}} = 2 \times \frac{0,0102}{0,05} \approx 0,408$

Dus ruim 40%

- T-8a** Maximale daglengte is 19 uur in week 25.
- b** Voor $t = 12$ en voor $t = 37$ is de daglengte overal 12 uur. Rond 21 maart en rond 21 september is dit het geval.
- c** Dan gaat de grafiek van d stijgend door de evenwichtswaarde.
- d** $\frac{365,25}{7} \approx 52,179$ dus afgerond 52,2.
- e** De amplitude voor 52° NB is $16,7 - 12 = 4,7$ dus is $a = 4,7$
- f** $d(t) = 16$ aflezen geeft $t \approx 8,5$ en $t \approx 17,6$
 Daglengte 16 uur op 52° NB op 8,5 weken na 21 maart en 17,6 weken na 21 maart.

T-9a

$$f(x) = \cos x$$

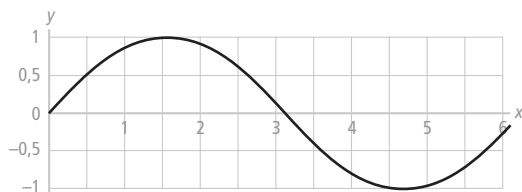
b

Bij spiegelen in de lijn $y = x$ zijn de punten P en Q elkaars spiegelbeeld.

Dan geldt $x_P = y_Q$ en $y_P = x_Q$

Verder geldt: als $\angle AOP = x$ dan is $\angle AOQ = \frac{1}{2}\pi - x$

Dan is $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = y_Q = x_P = \cos x$

c

$$g(x) = \sin x \text{ want } \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = x_Q = y_P = \sin x$$