

Hoofdstuk 6 - Oppervlakte en inhoud

bladzijde 160

- V-1a** Er passen 8 vierkanten in de puzzel dus één vierkant neemt $\frac{1}{8}$ -deel in beslag. De oppervlakte van de puzzel is $12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$. De diagonaal van het vierkant is de helft van de zijde van de puzzel, dus $12 : 2 = 6 \text{ cm}$. Volgens de stelling van Pythagoras geldt $\text{vierkantzijde}^2 + \text{vierkantzijde}^2 = 6^2$. Dit oplossen geeft

$$2 \cdot \text{vierkantzijde}^2 = 36$$

$$\text{vierkantzijde}^2 = 18$$

$$\text{vierkantzijde} = \sqrt{18} \text{ of } \text{vierkantzijde} = -\sqrt{18}$$

Alleen een positieve lengte heeft betekenis dus de zijde heeft lengte $\sqrt{18}$. De oppervlakte van het vierkant is dus $\sqrt{18} \times \sqrt{18} = 18 \text{ cm}^2$. Dat is $18 : 144 = \frac{1}{8}$ -deel van de puzzeloppervlakte.

- b** Alle puzzelstukjes kun je verdelen in kleine driehoeken zoals in de tekening hiernaast staat.

Door het aantal kleine driehoeken te tellen dat in elk puzzelstukje past kun je de oppervlakten van de puzzelstukjes met elkaar vergelijken. Je vindt:

- 1) de rode driehoek en de kleine driehoek bij het midden
- 2) het vierkant, het parallellogram en de grotere driehoek rechtsboven

- 3) de grote driehoek links en de grote driehoek onder

In de puzzel passen 16 kleine driehoeken en in het vierkant 2. Zo kun je ook zien dat het vierkant $\frac{1}{8}$ -deel van de puzzeloppervlakte is.

- c** De oppervlakte van een kleine driehoek is $\frac{1}{16}$ -deel van de puzzeloppervlakte van 144 cm^2 . Dat is dus $144 : 16 = 9 \text{ cm}^2$
De oppervlakte van de twee kleine driehoeken is dus 9 cm^2
De oppervlakte van het vierkant is 18 cm^2 (zie vraag a). Dat is dus ook de oppervlakte van het parallellogram en de grotere driehoek rechtsboven (zie vraag b).
De oppervlakte van elk van de twee grote driehoeken is
 $4 \times$ de oppervlakte van een kleine driehoek $= 4 \times 9 = 36 \text{ cm}^2$

- d** De kleine driehoeken:

Schuine zijde: in een zijde van de puzzel passen twee van zulke schuine zijden (zie de tekening bij vraag b), dus de lengte is $12 : 2 = 6 \text{ cm}$

Elke rechte zijde: deze is gelijk aan de zijde van het vierkant. In vraag a is deze uiterekend en bedraagt $\sqrt{18} \approx 4,24 \text{ cm}$

De grotere driehoek rechtsboven:

Schuine zijde $= 2 \times$ rechte zijde van een kleine driehoek $= 2 \times \sqrt{18} \approx 8,49 \text{ cm}$

Elke rechte zijde $=$ schuine zijde van een kleine driehoek $= 6 \text{ cm}$

De grote driehoeken:

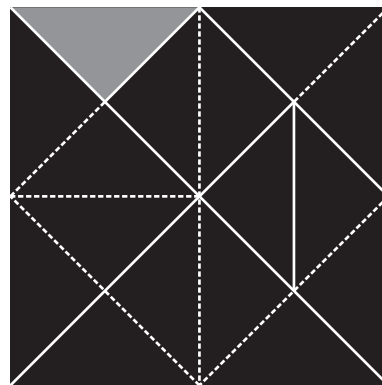
Schuine zijde $=$ zijde puzzel $= 12 \text{ cm}$

Elke rechte zijde $= 2 \times$ rechte zijde van een kleine driehoek $= 2 \times \sqrt{18} \approx 8,49 \text{ cm}$

Het parallellogram:

Korte zijde $=$ rechte zijde van een kleine driehoek $= \sqrt{18} \approx 4,24 \text{ cm}$

Lange zijde $=$ schuine zijde van een kleine driehoek $= 6 \text{ cm}$



- e Rode driehoek:

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \times \text{oppervlakte vierkant} = \frac{1}{2} \times 18 = 9 \text{ cm}^2$$

$$\text{basis} = \sqrt{18} \text{ cm}$$

$$\text{hoogte} = \sqrt{18} \text{ cm}$$

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \times \sqrt{18} \times \sqrt{18} = \frac{1}{2} \times 18 = 9 \text{ cm}^2, \text{ klopt}$$

Parallollogram:

$$\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte}$$

$$\text{basis} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{hoogte} = \frac{1}{4} \times \text{zijde puzzel} = \frac{1}{4} \times 12 = 3 \text{ cm}$$

$$\text{oppervlakte} = \text{basis} \times \text{hoogte} = 6 \times 3 = 18 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{oppervlakte rode driehoek}, \text{ klopt}$$

bladzijde 161

- V-2a** De diagonalen van een vlieger staan loodrecht op elkaar en één van de diagonalen deelt de andere middendoor.

- b** $AS = 2 \text{ cm}$, $BD = 4 \text{ cm}$ en $AC = 6 \text{ cm}$

Hieruit volgt $BS = 4 : 2 = 2 \text{ cm}$, $DS = 4 : 2 = 2 \text{ cm}$ en $CS = 6 - AS = 6 - 2 = 4 \text{ cm}$

De oppervlakte van de vlieger bestaat uit de oppervlakte van vier driehoeken:

$$\text{opp vlieger} = \text{opp } ABS + \text{opp } BCS + \text{opp } CDS + \text{opp } ADS =$$

$$\frac{1}{2} \times AS \times BS + \frac{1}{2} \times BS \times CS + \frac{1}{2} \times CS \times DS + \frac{1}{2} \times AS \times DS =$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 + 4 + 4 + 2 = 12 \text{ cm}^2$$

- c** $AS = 1 \text{ cm}$, $BD = 4 \text{ cm}$ en $AC = 6 \text{ cm}$

Hieruit volgt $BS = 4 : 2 = 2 \text{ cm}$, $DS = 4 : 2 = 2 \text{ cm}$ en $CS = 6 - AS = 6 - 1 = 5 \text{ cm}$.

De oppervlakte van de vlieger bestaat uit de oppervlakte van vier driehoeken:

$$\text{opp vlieger} = \text{opp } ABS + \text{opp } BCS + \text{opp } CDS + \text{opp } ADS =$$

$$\frac{1}{2} \times AS \times BS + \frac{1}{2} \times BS \times CS + \frac{1}{2} \times CS \times DS + \frac{1}{2} \times AS \times DS =$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times 5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 + 5 + 5 + 1 = 12 \text{ cm}^2$$

De oppervlakte blijft dus hetzelfde.

- V-3a** De oppervlakte van de gehele cirkel is $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

Het witte deel is $\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ de deel van de cirkel.

De oppervlakte van het witte deel is dus $\frac{7}{12} \cdot 9\pi = 5\frac{1}{4}\pi \approx 16,5$

Blijf in je berekening met π werken tot aan het eindantwoord om afrondfouten onderweg te voorkomen.

- b** De omtrek van de gehele cirkel is $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

De omtrek van het witte deel is dus $\frac{7}{12} \cdot 6\pi + 2 \cdot 3 = 3\frac{1}{2}\pi + 6 \approx 17,0$

- c** Voor de driehoek in de bovenste helft geldt:

$$\text{basis} = \text{straal} = 3$$

De hoek met de middellijn is $180^\circ : 3 = 60^\circ$, dus

$$\text{hoogte} = \text{straal} \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \sin 60^\circ$$

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \cdot \sin 60^\circ \approx 3,89$$

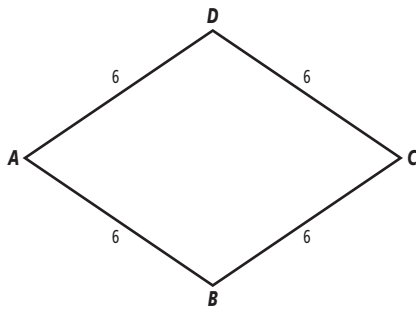
Voor de driehoek in de onderste helft geldt:

$$\text{basis} = \text{straal} = 3$$

$$\text{hoogte} = \text{straal} = 3$$

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4,5$$

V-4a



- b** De ruit kun je verdelen in vier driehoeken met $\text{basis} = AC : 2 = 10 : 2 = 5$ en $\text{schuine zijde} = 6$. Met de stelling van Pythagoras bereken je de hoogte van elke driehoek. Deze is $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$.
De oppervlakte van elke driehoek is $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{11} = 2,5\sqrt{11}$.
De oppervlakte van de ruit wordt daarmee $4 \times 2,5\sqrt{11} = 10\sqrt{11} \approx 33,2$.
- c** Met $AC = 9$ wordt de hoogte $\sqrt{6^2 - 4,5^2} = \sqrt{15,75}$ en de oppervlakte van de ruit $4 \times \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot \sqrt{15,75} \approx 35,72$.
Met $AC = 11$ wordt de hoogte $\sqrt{6^2 - 5,5^2} = \sqrt{5,75}$ en de oppervlakte van de ruit $4 \times \frac{1}{2} \cdot 5,5 \cdot \sqrt{5,75} \approx 26,38$.
- d** Nee, naarmate AC groter wordt neemt de oppervlakte juist af.

V-5a De punten P, Q, R en M vormen een vierhoek. De lijnen PQ en MR lopen evenwijdig, dus $PQRM$ vormt een trapezium.

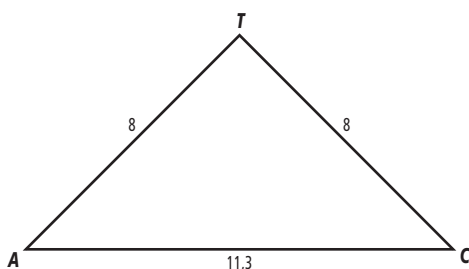
- b** $PQ = 12$
 $MR = 6$
 $QR = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8,49$
Om PM te berekenen kies je punt K in het midden van PQ . PM is de schuine zijde van de rechthoekige driehoek PKM met $PK = 6$ en $KM = QR \approx 8,49$, zodat $PM = \sqrt{6^2 + 8,49^2} \approx 10,39$.
Oppervlakte $PQRM = \text{oppervlakte driehoek } PKM + \text{oppervlakte rechthoek } KQRM = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot KM + KQ \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{72} + 6 \cdot \sqrt{72} = 9\sqrt{72} \approx 76,4$.
- c** De inhoud van de kubus is $12 \times 12 \times 12 = 1728$.
Verdeel de kubus in vier gelijke parten: snijd hem horizontaal doormidden door PQ en verticaal door RS . De inhoud van elk part is $1728 : 4 = 432$.
Het vlak $PQRS$ deelt een een van de parten in twee stukken. Eén van deze stukken is het kleine deel dat $PQRS$ van de kubus afsnijdt en het heeft als inhoud $432 : 2 = 216$.
Het grote deel dat $PQRS$ van de kubus afsnijdt heeft dan als inhoud $1728 - 216 = 1512$.

V-6a Kies punt M in het midden van AB . Met de stelling van Pythagoras volgt

$$MT = \sqrt{AT^2 - AM^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \text{ cm}$$

$$\text{opp } \triangle ABT = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{48} \approx 27,7 \text{ cm}^2$$

- b** $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,3 \text{ cm}$



- c Dit toon je aan met de omgekeerde stelling van Pythagoras: als de stelling van Pythagoras voor een driehoek klopt dan heeft die driehoek een hoek van 90° . De stelling van Pythagoras klopt voor $\triangle ACT$ (zie vraag b) dus $\angle ATC = 90^\circ$
- d Kies punt L in het midden van AC , dan geldt $AL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{128} \approx 5,66$ cm. De hoogte LT van de piramide volgt uit $LT = \sqrt{AT^2 - AL^2} = \sqrt{8^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{128})^2} = \sqrt{32} \approx 5,66$ cm (dit kun je ook afleiden uit de gelijkvormigheid van $\triangle ALT$ met $\triangle ACT$)
- e Een cirkel die precies in vierkant $ABCD$ past heeft een diameter die gelijk is aan lengte AB , dus 8 cm. De omtrek van de cirkel is $\pi \times \text{diameter} = 8\pi \approx 25,1$ cm
- f Een cirkel die door de punten A , B , C en D gaat heeft straal $r = AC : 2 = \sqrt{128} : 2 \approx 5,66$ cm. De oppervlakte van de cirkel is $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{128})^2 \approx 100,5$ cm²

bladzijde 162

- 1a Voor de balk geldt $\text{inhoud} = \text{lengte} \times \text{breedte} \times \text{hoogte} = 8 \times 12,5 \times 12 = 1200$ cm³
- b De inhoud zal gelijk blijven want de tweede stapel is opgebouwd uit hetzelfde aantal enveloppen als de eerste en de inhoud van een enkele enveloppe blijft onveranderd.

bladzijde 163

- 2a Het grondvlak $\triangle ABC$ heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$
 $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$, dus oppervlakte $G = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$
- b $\text{Inhoud} = G \cdot h = 6 \cdot AD = 6 \cdot 3 = 18$
- 3a Kies punt K in het midden van AB , dus $AK = 2$. De hoogte van het scheve prisma is DK en $\angle AKD$ is 90° , dus $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$
- b $\text{Inhoud} = G \cdot h = 6 \cdot \sqrt{5} \approx 13,42$
- 4a Het grondvlak is een cirkel met een straal van $10 : 2 = 5$ cm, dus de oppervlakte
 $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$
 $\text{Inhoud} = G \cdot h = 25\pi \cdot 10 = 250\pi \approx 785$ cm³
- b De middelste maatbeker heeft een oppervlakte $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$
 $\text{Inhoud} = G \cdot h = 16\pi \cdot 8 = 128\pi \approx 402$ cm³
 De kleinste maatbeker heeft een oppervlakte $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$
 $\text{Inhoud} = G \cdot h = 9\pi \cdot 6 = 54\pi \approx 170$ cm³
- 5a Ribbe $AE = 4$ cm. $ES = \sqrt{AE^2 - AS^2}$
 $AS = \frac{1}{2} AC$ en $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$ cm, dus $AS = \frac{1}{2} \sqrt{32} \approx 2,83$ cm
 Hieruit volgt $ES = \sqrt{4^2 - 2,83^2} \approx 2,83$ cm
- b $\text{Inhoud} = G \cdot h = AB \cdot BC \cdot ES = 4 \cdot 4 \cdot 2,83 \approx 45,3$ cm³
- 6a Diameter grootste schijf = 20 cm
 Diameter middelste schijf = 80% van de diameter grootste schijf = $0,80 \times 20 = 16$ cm
 Diameter kleinste schijf = 80% van de diameter middelste schijf = $0,80 \times 16 = 12,8$ cm

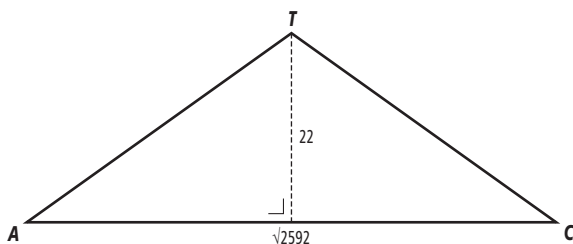
- b** Inhoud grootste schijf = $G \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 4 = 400\pi \approx 1257 \text{ cm}^3$
 Inhoud middelste schijf = $G \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 = 256\pi \approx 804 \text{ cm}^3$
 Inhoud kleinste schijf = $G \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 6,4^2 \cdot 4 \approx 515 \text{ cm}^3$
- c** De verhouding van de inhoud tussen de grootste en de middelste schijf is
- $$\frac{804}{1257} \times 100\% \approx 64\%$$
- Dat is een afname van $100\% - 64\% = 36\%$
 De verhouding van de inhoud tussen de middelste en de kleinste schijf is
- $$\frac{515}{804} \times 100\% \approx 64\%$$
- Dat is een afname van $100\% - 64\% = 36\%$
 De inhoud neemt met een vast percentage af want beide percentages zijn gelijk.

bladzijde 164

- 7a** Piramide $H.ABCD$ heeft grondvlak $ABCD$ en piramide $H.BCGF$ heeft grondvlak $BCGF$.
- b** De piramiden zijn exact hetzelfde want alle hebben
- een vierkant met ribbe 4 als grondvlak
 - een top die op hoogte 4 boven een hoekpunt van het grondvlak ligt.
- c** De kubus met inhoud $4^3 = 64$ wordt verdeeld in drie identieke piramiden. De inhoud van één piramide is dus $\frac{1}{3}$ -deel van de inhoud van de kubus en is $64 : 3 = 21\frac{1}{3}$
- d** In de formule is G het grondvlak van de piramide, maar het grondvlak is ook een vlak van de kubus, dus met oppervlakte $4^2 = 16$.
 In de formule is h de hoogte van de top van de piramide, maar de hoogte is ook een ribbe van de kubus, dus met lengte 4.
 Het product $G \cdot h$ is de inhoud van de kubus. Hiervan neem je het $\frac{1}{3}$ -deel want er gaan drie identieke piramiden in een kubus.
- e** Bij piramide $P.ABFE$ ligt top P in het verlengde van GH . Punt P is dus een verschuiving van punt H over een afstand van 4. De hoogte van P tot het grondvlak blijft door de verschuiving onveranderd op 4. In de formule voor de inhoud verandert h dus niet en de beide piramiden hebben eveneens hetzelfde grondvlak. De inhoud van beide piramiden zijn dus ook gelijk.

bladzijde 165

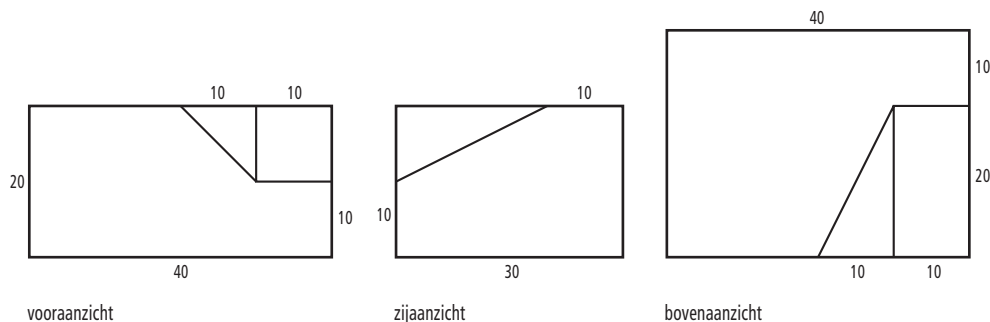
8a



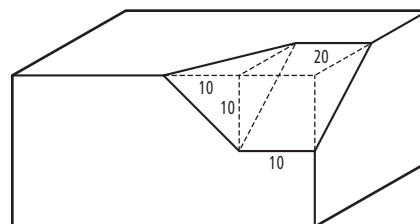
De afstand AC volgt uit $\sqrt{36^2 + 36^2} = \sqrt{2592}$

De vier opstaande ribben zijn even lang en hebben elk een lengte van $\sqrt{22^2 + (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2592})^2} = \sqrt{1132} \approx 33,65 \text{ m}$

- b** De oppervlakte van het glas bestaat uit de vier vlakken van de piramide. Elk vlak is een gelijkbenige driehoek met twee zijden van 33,65 meter op een basis van 36 meter. De hoogte van een driehoek is $\sqrt{33,65^2 - (\frac{1}{2} \cdot 36)^2} = \sqrt{808}$
De oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sqrt{808} \approx 511,7 \text{ m}^2$
De oppervlakte van het glas is $4 \times 511,7 \approx 2047 \text{ m}^2$
- c** $\text{Inhoud} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot 22 = 9504 \text{ m}^3$
- 9a** $\text{Inhoud cilinder} = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 200\pi \approx 628,3$
 $\text{Inhoud kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 66\frac{2}{3}\pi \approx 209,$
- b** De formule voor de inhoud van de kogel is $\frac{1}{3} \times$ de inhoud van de cilinder, dus de kogel neemt $\frac{1}{3} \times 100\% = 33,3\%$ van de inhoud in.
- 10a** Viervlak $BGFM$ is een piramide. Kies bijvoorbeeld $\triangle BFM$ als grondvlak en FG als hoogte. De oppervlakte G van het grondvlak is $\frac{1}{4}$ -deel van het voorvlak $ABFE$, dus $G = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot AE = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 3 = 4,5$
Daarmee wordt de inhoud $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot FG = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot 4 = 6$
- b** Eerst bereken je de lengte van de zijden van $\triangle BGM$ uit $FM = 3$, $BF = 3$ en $FG = 4$:
 $BM = \sqrt{FM^2 + BF^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$
 $GM = \sqrt{FM^2 + FG^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
 $BG = \sqrt{BF^2 + FG^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
 $\triangle BGM$ is dus een gelijkbenige driehoek. Kies punt K in het midden van BM .
De hoogte KG van $\triangle BGM$ is $\sqrt{GM^2 - (\frac{1}{2} BM)^2} = \sqrt{25 - \frac{1}{4} \cdot 18} = \sqrt{20,5}$
Hiermee wordt de oppervlakte $\triangle BGM = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot KG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{20,5} \approx 9,6$
- c** De piramide opgevat als $F.BGM$ heeft dezelfde inhoud als de piramide opgevat als $G.BFM$.
Daaruit volgt:
 $\text{Inhoud } F.BGM = \text{Inhoud } G.BFM$
 $\frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte } \triangle BGM \cdot h = 6$ (zie vraag a)
 $\frac{1}{3} \cdot 9,6 \cdot h = 6$ (zie vraag b)
 $9,6 \cdot h = 18$
 $h = 18 : 9,6 \approx 1,88$

11a

- b** In de figuur hiernaast zie je de afmetingen van het prisma en de piramide.
Met de voorste driehoek als grondvlak is de inhoud van de piramide $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10) \cdot 20 \approx 333 \text{ cm}^3$
De inhoud van het prisma is de helft van het blok met zijden $10 \times 10 \times 20 \text{ cm}$,
dus $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times 20 = 1000 \text{ cm}^3$
De inhoud van het deel is $333 + 1000 = 1333 \text{ cm}^3$



- c De inhoud van het betonblok is de inhoud van het blok met zijden $40 \times 30 \times 20$ waar het weggelaten deel vanaf wordt getrokken. Dat geeft
 $40 \times 30 \times 20 - 1333 = 22\,667 \text{ cm}^3$

bladzijde 166

- 12a** $r_1 = \sqrt{r^2 - MN^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$
 oppervlakte $= \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot (\sqrt{75})^2 = 75\pi \approx 235,6$
b $r_2 = \sqrt{r^2 - MN^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84}$
 oppervlakte $= \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot (\sqrt{84})^2 = 84\pi \approx 263,9$
c Voor elke cilinder geldt $h = 1$.
 De inhoud van de cilinder met straal r_1 is $\pi \cdot r_1^2 \cdot h = 235,6 \cdot 1 = 235,6$
 De inhoud van de cilinder met straal r_2 is $\pi \cdot r_2^2 \cdot h = 263,9 \cdot 1 = 263,9$

13a

nummer van het plakje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
straal van de buitenste cilinder	10	$\sqrt{99}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{84}$	$\sqrt{75}$	8	$\sqrt{51}$	6	$\sqrt{19}$
inhoud van de buitenste cilinder	314,2	311,0	301,6	285,9	263,9	235,6	201,1	160,2	113,1	59,7
straal van de binnenste cilinder	$\sqrt{99}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{91}$	$\sqrt{84}$	$\sqrt{75}$	8	$\sqrt{51}$	6	$\sqrt{19}$	0
inhoud van de binnenste cilinder	311,0	301,6	285,9	263,9	235,6	201,1	160,2	113,1	59,7	0

- b** De cilinders die precies in de halve bol passen zijn de plakjes met de straal van de binnenste cilinder. De som van de inhoud van de binnenste cilinders is dus de gevraagde totale inhoud. Optellen van de laatste rij in de tabel geeft hiervoor
 $311,0 + 301,6 + \dots + 59,7 + 0 = 1932,1$
c De cilinders waar de halve bol precies in past zijn de plakjes met de straal van de buitenste cilinder. De som van de inhoud van de buitenste cilinders is dus de gevraagde totale inhoud. Optellen van deze rij in de tabel geeft hiervoor
 $314,2 + 311,0 + \dots + 113,1 + 59,7 = 2246,3$
d Het gemiddelde is $(1932,1 + 2246,3) : 2 = 2089,2$
e De benadering met plakjes voor de halve bol was 2089,2 dus voor de gehele bol
 $2 \times 2089,2 = 4178,4$
 De inhoud volgens de formule $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ geeft $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \approx 4188,8$
 De benadering in plakjes klopt dus goed met de berekende inhoud volgens deze formule.

bladzijde 167

- 14a** Inhoud $= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \approx 33,51 \text{ cm}^3$
 Oppervlakte $= 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 2^2 \approx 50,27 \text{ cm}^2$
b De diameter van een balletje is $2r = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}$
 In de zijde van 20 cm passen $20 : 4 = 5$ balletjes.
 In de zijde van 16 cm passen $16 : 4 = 4$ balletjes.
 In de zijde van 4 cm past $4 : 4 = 1$ balletje.
 In totaal passen er dus $5 \times 4 \times 1 = 20$ balletjes in de doos.

- c** De inhoud van de doos is $20 \times 16 \times 4 = 1280 \text{ cm}^3$
 De inhoud van de 20 balletjes is $20 \times 33,51 = 670,2 \text{ cm}^3$
 De balletjes nemen $670,2 : 1280 \times 100\% = 52,4\%$ van de doos in.

- 15** Voor de berekening van de oppervlakte van de aarde heb je de straal van de aarde nodig. De evenaar rond de aarde vormt de omtrek van een cirkel. De straal hiervan is de straal van de aarde. Er geldt dus

$$\text{Omtrek aarde} = 2\pi \cdot r_{\text{aarde}}$$

$$40000 = 2\pi \cdot r_{\text{aarde}}$$

$$r_{\text{aarde}} = 40000 : (2\pi) \approx 6366 \text{ km}$$

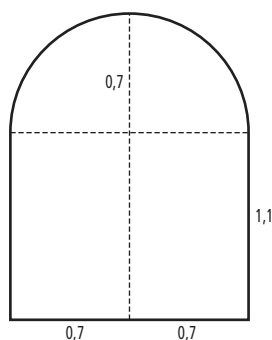
De oppervlakte van de aarde wordt daarmee $4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6366^2 \approx 509,3$ miljoen km^2

Als hiervan 70% bedekt is met water blijft er 30% over voor land.

Dat is $0,30 \times 509,3$ miljoen $\text{km}^2 \approx 152,8$ miljoen km^2

- 16a** Het onderste deel van de glashak is een cilinder en het bovenste deel een halve bol.

b



- c** De straal van de halve bol is 0,7 m.
 De inhoud van de halve bol is $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,7^3 \approx 0,718 \text{ m}^3$
 De straal van de cilinder is 0,7 m en de hoogte is 1,1 m.
 De inhoud van de cilinder is $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 0,7^2 \cdot 1,1 \approx 1,693 \text{ m}^3$
 De inhoud van de glashak is dus $0,718 + 1,693 \approx 2,4 \text{ m}^3$
- d** De oppervlakte van de halve bol is $\frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 0,7^2 \approx 3,08 \text{ m}^2$
 De oppervlakte van de cilinder is $2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 0,7 \cdot 1,1 \approx 4,84 \text{ m}^2$
 Samen is dat $3,08 + 4,84 = 7,92 \text{ m}^2$
 Er is dus $7,92 : 8 \times 0,75 \approx 0,74$ liter verf nodig.

- 17** Voor de berekening moet je de oppervlakte van de bol weten. Hiervoor heb je de straal van de bol nodig. Die bereken je uit $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 500$ en geeft

$$r^3 = 500 : \left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right) \approx 119,4$$

$$r = 119,4^{\frac{1}{3}} \approx 4,92 \text{ m}$$

De oppervlakte van de bol is $4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 4,92^2 \approx 304,2 \text{ m}^2$. Er is dus ongeveer $304,2 \text{ m}^2$ isolatiemateriaal nodig.

- 18a** 1 cm^3 als kubus is een kubus met ribben van 1 cm. Een vlak van zo'n kubus heeft een oppervlakte van $1 \times 1 = 1 \text{ cm}^2$. Er zijn 6 vlakken dus de oppervlakte is $6 \times 1 = 6 \text{ cm}^2$

- b** De straal van een bolvormige druppel volgt uit $\text{inhoud} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 1 \text{ cm}^3$, en geeft $r = (1 : (\frac{4}{3} \cdot \pi))^{\frac{1}{3}} \approx 0,62 \text{ cm}$. De oppervlakte is $4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 0,62^2 \approx 4,83 \text{ cm}^2$
 Dat is $6 - 4,83 = 1,17 \text{ cm}^2$ minder dan van de kubus, ofwel $1,17 : 6 \times 100\% = 19,5\%$

bladzijde 168

- 19a** De omtrek is $\pi \cdot \text{diameter} = \pi \cdot 10 \approx 31,4 \text{ cm}$



- c** De oppervlakte van de cilindermantel is de oppervlakte van de rechthoek, dus $31,4 \times 11,2 \approx 352 \text{ cm}^2$

- 20a** De oppervlakte van de kegelmantel is de oppervlakte van de halve cirkel met straal 20 cm, dus $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 20^2 \approx 628 \text{ cm}^2$

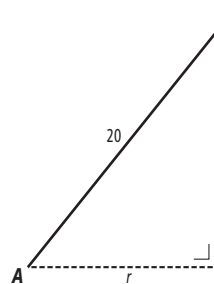
- b** De omtrek van de grondcirkel is $\frac{1}{2} \cdot \text{Omtrek oorspronkelijke cirkel} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r_{\text{oorspronkelijke cirkel}} = \pi \cdot 20 \approx 62,8 \text{ cm}$

De straal van de grondcirkel vind je dan uit $2\pi \cdot r = 62,8$ en geeft $r = 10 \text{ cm}$

- c** Uit de tekening hiernaast volgt voor de straal $r = \sqrt{20^2 - 15^2} = \sqrt{175} \approx 13,2 \text{ cm}$

De omtrek van de grondcirkel is $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \sqrt{175} \approx 83,1 \text{ cm}$

- d** De omtrek van de oorspronkelijk cirkel is $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 20 \approx 125,7 \text{ cm}$
De omtrek van de grondcirkel is 83,1 cm, dat is $83,1 : 125,7 = 0,66$ deel. Dit gedeelte van de omtrek is ook het gebruikte gedeelte van de oorspronkelijke cirkel. De oppervlakte van de kegelmantel is dus $0,66 \times$ de oppervlakte van de oorspronkelijke cirkel $= 0,66 \times \pi \cdot r^2 = 0,66 \cdot \pi \cdot 20^2 \approx 825 \text{ cm}^2$



bladzijde 169

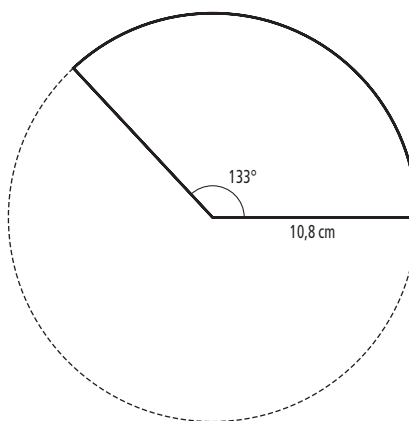
- 21a** De straal a van de oorspronkelijke cirkel, waarvan de kegelmantel een onderdeel is, bereken je met de formule $a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} \approx 10,8 \text{ cm}$
De omtrek van de grondcirkel is $2\pi \cdot r = 8\pi \approx 25,1 \text{ cm}$ en van de oorspronkelijke cirkel $2\pi \cdot a = 2\pi \cdot \sqrt{116} \approx 67,7 \text{ cm}$
De uitslag van de kegelmantel is dus gelijk aan $25,1 : 67,7 \approx 0,37$ deel van de gehele cirkel en heeft een middelpuntshoek van $0,37 \cdot 360^\circ \approx 133^\circ$
De tekening van de uitslag kun je nu maken.

- b** De oppervlakte van de kegelmantel is $\pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 4 \cdot 10,8 \approx 136 \text{ cm}^2$

- c** 225° is het $\frac{225}{360} = \frac{5}{8}$ -deel van een gehele cirkel. Er geldt
Omtrek van de grondcirkel $= \frac{5}{8} \times$ omtrek van de oorspronkelijke cirkel met straal $a = 12 \text{ cm}$, dus $2\pi \cdot r = \frac{5}{8} \cdot 2\pi \cdot 12$, waaruit de straal van de grondcirkel volgt $r = \frac{5}{8} \cdot 12 = 7,5 \text{ cm}$

De oppervlakte G van de grondcirkel is dus $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 7,5^2 = 56,25\pi \text{ cm}^2$ en de hoogte van de kegel $h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{12^2 - 7,5^2} = \sqrt{87,75} \text{ cm}$

Hiermee bereken je de inhoud van de kegel: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 56,25\pi \cdot \sqrt{87,75} \approx 552 \text{ cm}^3$

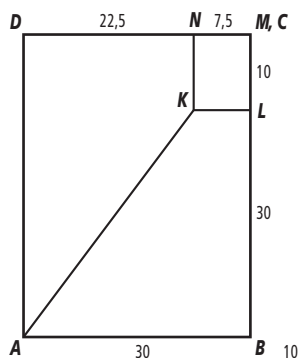


- 22** In enkele boeken staat $1\mu = 0,01 \text{ mm}$. Dit is onjuist.
Juist is $1\mu = 0,001 \text{ mm}$. Onderstaande antwoorden gaan uit van de juiste waarde van 1μ .
- a** De totale oppervlakte van een bloedcel vormt een gesloten cilinder.
De totale oppervlakte bestaat dus uit $2 \times$ het grondvlak + de cilindermantel.
De straal van de cilinder is $7,2\mu : 2 = 3,6\mu = 3,6 \times 0,001 \text{ mm} = 0,0036 \text{ mm}$
en de hoogte is $2,2\mu = 0,0022 \text{ mm}$. Hiermee wordt de totale oppervlakte
 $2 \times \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2 \times \pi \cdot 0,0036^2 + 2\pi \cdot 0,0036 \cdot 0,0022 \approx 0,00013 \text{ mm}^2$
- b** De totale oppervlakte van vier op elkaar gekleefde schijfjes bestaat uit
 $2 \times$ het grondvlak + $4 \times$ de cilindermantel, dus
 $2 \times \pi r^2 + 4 \times 2\pi r \cdot h = 2 \times \pi \cdot 0,0036^2 + 4 \times 2\pi \cdot 0,0036 \cdot 0,0022 \approx 0,00028 \text{ mm}^2$
- c** Indien vier bloedcellen als losse cellen voorkomen hebben ze een totale oppervlakte
van $4 \times 0,00013 = 0,00052 \text{ mm}^2$
Vier op elkaar gekleefde cellen hebben dus maar $0,00028 : 0,00052 \times 100\% \approx 54\%$
oppervlakte hiervan. Dat is $100 - 54 = 46\%$ minder oppervlakte. Als alle cellen in
groepen van vier aan elkaar kleven wordt er dus 46% minder zuurstof opgenomen.

- 23a** De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ cm}^3$
De hoogte h van de onder- en bovenkegel in de dubbele kegel is voor beide $12 : 2 = 6 \text{ cm}$
De inhoud van de dubbele kegel is $2 \times \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 2 \times \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = 2 \times \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 100\pi \text{ cm}^3$
De inhoud van de kegel en de dubbele kegel zijn dus gelijk.
- b** De oppervlakte van de kegelmantel is $\pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} = 65\pi \text{ cm}^2$
De oppervlakte van de dubbele kegel is
 $2 \times \pi \cdot r \cdot a = 2 \times \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = 2 \times \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 + 6^2} = 10\sqrt{61} \cdot \pi \approx 78\pi \text{ cm}^2$
De oppervlakten zijn dus niet gelijk.

bladzijde 170

- 24a** De hoogte van 45 cm waarop de doorsnede gemaakt wordt is op $45 : 60 = 0,75$ van de
hoogte van 60 cm van het blok.
De afstand L tot BF is dus ook $0,75$ van BC dus $0,75 \times 40 = 30 \text{ cm}$.
De afstand N tot HD is dus ook $0,75$ van CD dus $0,75 \times 30 = 22,5 \text{ cm}$.
De doorsnede kun je nu tekenen.



- b** Zijde 10 cm moet lengte 40 worden, dus de zijde moet je met het getal
 4 vermenigvuldigen.
Voor de andere zijden klopt dat ook.
De zijden van piramide $G.KLMN$ zijn een kwart van de zijden van piramide
 $G.ABCD$.

- c** De oppervlakte van $ABCD$ is $AB \times CD = 30 \times 40 = 1200$
De oppervlakte van $KLMN$ is $KL \times MN = 7,5 \times 10 = 75$
- d** oppervlakte $ABCD = 16 \times$ oppervlakte $KLMN$
- e** Inhoud van $G.KLMN = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 75 \cdot 15 = 375$
Inhoud van $G.ABCD = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1200 \cdot 60 = 24000$
De verhouding van de inhoud is $375 : 24000 : 375 = 1 : 64$
- 25a** De inhoud van de kleine en de grote kubus verhouden zich als $1 : 729$.
De inhoud van de kleine en de grote kubus verhouden zich ook als $1 : k^3$ waarbij k de zijde van de grote kubus is. Bij $k^3 = 729$ is $k = 729^{\frac{1}{3}} = 9$, dus de zijde van de kleine kubus moet je met 9 vermenigvuldigen om de zijde van de grote kubus te krijgen.
- b** De oppervlakte van de kleine kubus is k^2 kleiner dan de oppervlakte van de grote kubus. Voor de kleine kubus is dus $0,18 : 9^2 = 0,18 : 81 \approx 0,002$ liter verf nodig.
- 26** Het middelste poppetje is 7 cm hoog, dat is $7 : 5 = 1,4 \times$ de hoogte van het kleinste poppetje.
De oppervlakte van het middelste poppetje is dus $44 \times 1,4^2 = 86,24 \text{ cm}^2$
De inhoud van het middelste poppetje is dus $20 \times 1,4^3 = 54,88 \text{ cm}^3$
Het grootste poppetje is 9 cm hoog, dat is $9 : 5 = 1,8 \times$ de hoogte van het kleinste poppetje.
De oppervlakte van het grootste poppetje is dus $44 \times 1,8^2 = 142,56 \text{ cm}^2$
De inhoud van het grootste poppetje is dus $20 \times 1,8^3 = 116,64 \text{ cm}^3$

bladzijde 171

- 27a** Het bovenste deel zand heeft de halve hoogte van de kegel.
Het zand is op te vatten als een verkleining van 2 keer van de kegel.
De inhoud van het zand is dus $2^3 = 8$ maal kleiner dan de kegel, ofwel $\frac{1}{8}$ -deel van de kegel.
- b** Voor het leeglopen van $\frac{1}{8}$ -deel van de kegel is 15 seconden nodig. Voor het leeglopen van de zandloper moet een hele kegel met zand leeglopen.
Dat duurt dus $8 \times 15 = 120$ seconden = 2 minuten.
- 28a** De oppervlakte van het grondvlak van de piramide is $12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$
De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 28 = 1344 \text{ cm}^3$
Er kan dus 1344 cm^3 water in.
- b** De hoogte van de piramide is 28 cm. Als de bovenste 7 cm worden weggelaten dan laat je $7 : 28 = 0,25$ ofwel 25% weg. Omdat de ribben van de piramide recht zijn snijdt je hier ook 25% van af.
- c** De hoogte van de piramide in de tweede vaas is 21 cm
De piramide in de tweede vaas is op te vatten als een verkleining van $28 : 21 = \frac{4}{3}$ keer van de piramide in de eerste vaas.
De inhoud van de tweede vaas is dus $(\frac{4}{3})^3$ keer kleiner ofwel $1344 : (\frac{4}{3})^3 = 567 \text{ cm}^3$
In de tweede vaas kan dus 567 cm^3 water.

- d** Inhoud van de eerste vaas = inhoud balk – inhoud piramide =
 $14 \times 14 \times 30 - \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 5880 - \frac{1}{3} \cdot 12 \times 12 \cdot 28 = 4536 \text{ cm}^3 = 4,536 \text{ dm}^3$
 Het gewicht van de eerste vaas is dus $400 \times 4,536 \approx 1814 \text{ gram}$
 Inhoud van de tweede vaas = inhoud balk – inhoud piramide =
 $14 \times 14 \times (30 - 7) - \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 4508 - \frac{1}{3} \cdot (0,75 \cdot 12 \times 0,75 \cdot 12) \cdot 21 = 3941 \text{ cm}^3 = 3,941 \text{ dm}^3$
 Het gewicht van de tweede vaas is dus $400 \times 3,941 \approx 1576 \text{ gram}$
- 29a** Het gewicht van de tijger is afhankelijk van de inhoud van de tijger, dus de tijger weegt ongeveer $4,5 \times 4^3 = 288 \text{ kg}$
- b** De vacht van de tijger is afhankelijk van de oppervlakte van de tijger, dus de tijger heeft ongeveer $15 \times 4^2 = 240 \text{ dm}^2$ vacht.
- c** De warmteafgifte door de huid moet even groot zijn als de warmteproductie.
 Een dier met $2 \times$ kleinere afmetingen heeft een $2^2 = 4 \times$ kleiner oppervlak en een $2^3 = 8 \times$ kleinere inhoud. De verhouding warmteafgifte : warmteproductie moet gelijk zijn aan de verhouding oppervlakte : inhoud, ofwel $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = 2$
 Een dier met $2 \times$ kleinere afmetingen moet dus $2 \times$ meer warmte produceren en heeft naar verhouding $2 \times$ meer voedsel nodig heeft.
 Evenzo kun je aantonen dat een dier met $k \times$ kleinere afmetingen $k \times$ meer warmte moet produceren en naar verhouding $k \times$ meer voedsel nodig heeft.
- d** De draagkracht is evenredig met de dikte van de poten.
 Het gewicht van het dier is evenredig met de inhoud.
 De poten van de tijger moeten een $4^3 = 64 \times$ groter gewicht dragen dan de poten van de kat.
 De oppervlakte van de tijger is maar $4^2 = 16 \times$ groter dan van de kat en de poten zouden in verhouding ook $16 \times$ dikker zijn. Maar dan zouden de poten slechts een $16 \times$ zo groot gewicht kunnen dragen en geen $64 \times$. De poten van de tijger moeten dus naar verhouding dikker zijn dan de poten van een kat om toch het $64 \times$ grotere gewicht te kunnen dragen.
- 30a** Henk is $180 : 90 = 2 \times$ groter dan Boy. Het volume van Boy moet met $2^3 = 8$ vermenigvuldigd worden om dat van Henk te krijgen.
- b** Henk zou in verhouding $8 \times 16 = 128 \text{ kg}$ moeten zijn.
- c** Een volwassene heeft in het algemeen een andere lichaamsvorm dan een peuter.

bladzijde 172

- 31a** $MC = 9 \text{ cm}$ en $MD = 9 \text{ cm}$
 Kies K halverwege CD , dan is $KC = \sqrt{MC^2 - KM^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} \approx 6,71 \text{ cm}$
 $CD = 2 \times KC = 2 \times 6,71 \approx 13,4 \text{ cm}$
- b** oppervlakte $= \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 13,4 \cdot 6 = 40,2 \text{ cm}^2$
- c** oppervlakte trapezium = oppervlakte $\triangle AMD$ + oppervlakte $\triangle MCD$ + oppervlakte $\triangle MBC =$
 oppervlakte $\triangle AMD = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27 \text{ cm}^2$
 oppervlakte $\triangle MCD = 40,2 \text{ cm}^2$
 oppervlakte $\triangle MBC = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27 \text{ cm}^2$
 oppervlakte trapezium $= 27 + 40,2 + 27 = 94,2 \text{ cm}^2$

32a $ABCD$ is een ruit dus AD is evenwijdig aan BC . Verder is gegeven dat DF en BE loodrecht op het grondvlak staan, dus BCE is evenwijdig aan ADF . Alle punten in BCE liggen dus even ver van ADF .

Punt B en E liggen beide in BCE en liggen dus ook even ver van ADF .

b De afstand van E tot ADF is gelijk als de afstand van B tot ADF (zie vraag a)
 $\triangle ABD$ is een gelijkzijdige driehoek. De afstand van B tot ADF is de afstand van B tot AD en is $\sqrt{6^2 - (6:2)^2} = \sqrt{27} \approx 5,2$

c $\triangle ADF$ is een rechthoekige driehoek want DF staat loodrecht op het grondvlak.

$$\text{Inhoud} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DF\right) \cdot \sqrt{27} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot \sqrt{27} = 31,2$$

d $\text{Inhoud} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AD \cdot \sqrt{27}\right) \cdot BE = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{27}\right) \cdot 3 = 15,6$

e $BDFE$ is te splitsen in een rechthoek met zijden BD en BE en een driehoek met schuine zijde EF .

$$\text{oppervlakte rechthoek} = BD \times BE = 6 \times 3 = 18$$

$$\text{oppervlakte driehoek} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 - 3) = 9$$

$$\text{oppervlakte } BDFE = 18 + 9 = 27$$

De hoogte van A tot $BDFE$ is hetzelfde als de afstand van B tot AD want $\triangle ABD$ is een gelijkzijdige driehoek. Hieruit volgt $\text{inhoud } A.BDFE = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot \sqrt{27} \approx 46,8$

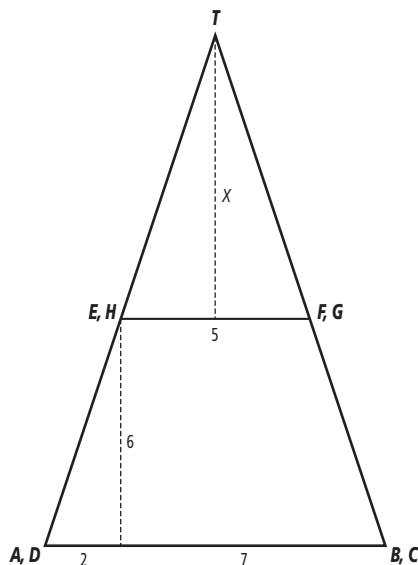
f Manier 1:

Piramide $C.BDFE$ is het spiegelbeeld van piramide $A.BDFE$ en heeft dus dezelfde inhoud. Het lichaam bestaat uit de som van beide piramiden, dus heeft als inhoud $2 \times 46,8 = 93,6$

Manier 2:

Piramide $A.BDFE$ is te splitsen in de piramiden $E.ABD$ en $E.ADF$. Het gehele lichaam bestaat dus uit $2 \times (\text{inhoud } E.ABD + \text{inhoud } E.ADF) = 2 \times (31,2 + 15,6) = 93,6$

33a



In de tekening zie je dat $\triangle TEF$ gelijkvormig is met $\triangle TAB$.

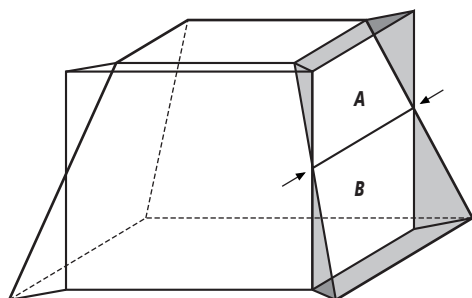
$$\text{Er geldt dus } \frac{EF}{AB} = \frac{5}{9} = \frac{x}{x+6}$$

$$\text{Oplossen geeft } 5(x+6) = 9x; 5x+30 = 9x; 4x = 30; x = 7,5 \text{ cm.}$$

De hoogte van de piramide is dus $x+6 = 7,5+6 = 13,5 \text{ cm}$

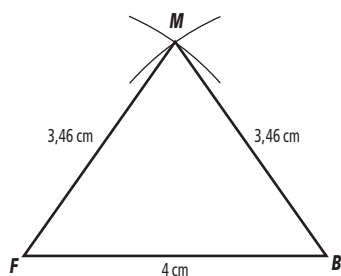
- b $\text{Inhoud} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \times 9 \cdot 13,5 = 364,5 \text{ cm}^3$
- c De inhoud van de afgeknotte piramide = inhoud piramide $T.ABCD$ – inhoud piramide $T.EFGH = 364,5 - \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 364,5 - \frac{1}{3} \cdot 5 \times 5 \cdot 7,5 = 302 \text{ cm}^3$
- d Nee, bij de vorige vraag berekende je dat het 302 cm^3 is.

Door de afgeknotte piramide te veranderen in een balk worden stukken zoals A toegevoegd en stukken zoals B weggehaald. Door A 180° om de lijn met de pijltjes te draaien kun je zien dat B iets groter is dan A. Daaruit volgt dat de afgeknotte piramide een iets grotere inhoud heeft dan de balk.



bladzijde 173

- 34a Rond M tel je 6 driehoeken in het achtste deel van de kubus. Er zijn in totaal dus $6 \times 8 = 48$ driehoeken.
- b AM vormt de halve diagonaal van een kubus met een ribbe van 4 cm.
De lengte is $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{AF^2 + FE^2}$
 $AF = 4 \text{ cm}$
 $FE^2 = FB^2 + BE^2 = 4^2 + 4^2 = 32$,
dus $AM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 32} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{48} \approx 3,46 \text{ cm}$
- c Driehoek BFM heeft zijden $BF = 4 \text{ cm}$, $FM = BM = 3,46 \text{ cm}$

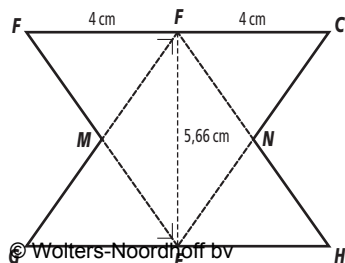


Construeer M met een passer.

De hoogte van de driehoek is $\sqrt{3,46^2 - (\frac{1}{2} \cdot 4)^2} \approx 2,83 \text{ cm}$

De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,83 = 5,66 \text{ cm}^2$

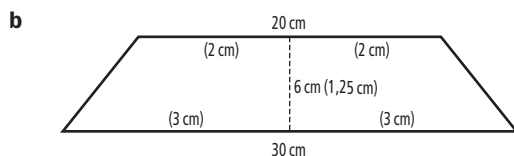
- d Teken $AC = 8 \text{ cm}$. Teken punt F in het midden en punt E op de middelloodlijn op een afstand van $\sqrt{32} \approx 5,66 \text{ cm}$. Het vlak $ACHG$ is op te vatten als twee driehoeken. Driehoek FGH teken je op overeenkomstige wijze.



- e** Punt M is het snijpunt van de diagonalen van rechthoek $AFEG$ zodat M op een afstand van $AF : 2 = 2$ cm van EF ligt. De hoogte van $\triangle EFM$ is dus 2 cm met basis $EF = 5,66$ cm.
De oppervlakte van $FMEN$ is $2 \times$ de oppervlakte van EFM , dus $2 \times \frac{1}{2} \cdot 5,66 \cdot 2 \approx 11,3$ cm²
- f** Bij elk van de acht hoekpunten van de kubus liggen drie van zulke piramiden, bijvoorbeeld met top M en als grondvlak een vierkant in het voorvlak, het rechter zijvlak en het bovenvlak. Er zijn dus $8 \times 3 = 24$ van dergelijke piramiden.
- g** Punt M ligt in het midden van de kubus waar A, G, E, B en F hoekpunten van vormen. De afstand van M tot de vlakken van dit kubusje is dus $4 : 2 = 2$ cm.
De oppervlakte van het grondvlak van een enkele piramide uit vraag f is $4 \times 4 = 16$ cm². De inhoud van zo'n piramide is dus $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2 = 10\frac{2}{3}$ cm³
De inhoud van alle piramiden uit vraag f samen is dus $24 \times 10\frac{2}{3} = 256$ cm³
De inhoud van de kubus waar de Trickstar in past is $8 \times 8 \times 8 = 512$ cm³
De inhoud van de Trickstar zelf is dus $512 - 256 = 256$ cm³

bladzijde 176

- T-1a** De diameter van de cilinder heeft dezelfde lengte als AB . De straal is dus $4 : 2 = 2$ cm en de inhoud $G \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \approx 126$ cm³
- b** Het onderste deel van $AFHD.BQGC$ is een balk met hoogte 7 cm en het bovenste deel is een prisma. De inhoud van de balk is $4 \times 4 \times 7 = 112$ cm³.
Het prisma heeft als grondvlak de driehoek PQG en hoogte EF . De inhoud van het prisma is dus $G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot FQ \cdot FG \times EF = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 24$ cm³
De inhoud van $AFHD.BQGC$ is de som van de inhoud, dus $112 + 24 = 136$ cm³
- c** De inhoud van $APQB.RHGS$ is de inhoud van de balk $ABCD.EFGH$ waar je de inhoud van twee prisma's van aftrekt. De inhoud van het bovenste prisma is al berekend bij vraag b. Het onderste prisma is even groot. De inhoud van $APQB.RHGS$ wordt dus $4 \times 4 \times 10 - 2 \times 24 = 112$ cm³
- T-2a** Dit is de inhoud van een cilinder met straal $30 : 2 = 15$ cm en hoogte 39 cm.
De inhoud is $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 39 \approx 27567$ cm³ $\approx 27,6$ liter



- c** Noem de top van de kegel punt T en de noem x de hoogte van T tot het bovenste grondvlak met diameter 20 cm. Dan is $x + 6$ de afstand van T tot het onderste grondvlak met diameter 30 cm. Op grond van gelijkvormigheid van driehoeken die je in het zijaanzicht kunt tekenen geldt $\frac{20}{30} = \frac{x}{x+6}$.
Oplossen geeft $20(x+6) = 30x$; $30x = 20x + 120$; $10x = 120$; $x = 12$ cm
De hoogte van de hele kegel is dus $12 + 6 = 18$ cm en de inhoud is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 18 = 4241,2$ cm³
De hoogte van de afgesneden top is 12 cm en heeft inhoud $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 12 = 1256,6$ cm³
De inhoud van het middelste deel van de melkbus is dus $4241,2 - 1256,6 \approx 2985$ cm³

- d** De inhoud van de bovenste cilinder is $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 9 \approx 2827 \text{ cm}^3$
De totale inhoud van de melkbus is de som van de inhoud van de drie delen, dus $27567 + 2985 + 2827 = 33379 \text{ cm}^3 \approx 33,4 \text{ liter}$.
- T-3a** Om de inhoud van de halve bol te berekenen heb je de straal nodig. De straal is gelijk aan de halve diameter van de paal, dus $20 : 2 = 10 \text{ cm}$.
De inhoud van de halve bol is $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 \approx 2094 \text{ cm}^3$
Voor de rest van de paal haal je de halve bol eraf.
De cilinder die je dan krijgt heeft lengte $240 - 10 = 230 \text{ cm}$ en inhoud $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 230 \approx 72257 \text{ cm}^3$.
De totale inhoud van de paal is dus $2094 + 72257 = 74351 \text{ cm}^3$
Er gaan $100 \times 100 \times 100 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$ in een m^3 , dus de inhoud is $74351 : 1\,000\,000 = 0,074351 \text{ m}^3$. Het gewicht van de paal wordt daarmee $2200 \times 0,074351 \approx 163,6 \text{ kg}$
- b** De oppervlakte van de halve bol is $\frac{1}{2} \times 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \times 4\pi \cdot 10^2 \approx 628 \text{ cm}^2$
De lengte van de cilinder die nog uitsteekt boven de grond is $140 - 10 = 130 \text{ cm}$
De oppervlakte van de cilinder is $2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 10 \cdot 130 \approx 8168 \text{ cm}^2$
De totale oppervlakte is dus $628 + 8168 = 8796 \text{ cm}^2$
Er gaan $100 \times 100 = 10\,000 \text{ cm}^2$ in een m^2 , dus de oppervlakte is $8796 : 10\,000 = 0,8796 \text{ m}^2$
Om 25 palen te verven is dus $25 \times 0,8796 : 8 \approx 2,75 \text{ liter}$ verf nodig.
- T-4a** Het lichaam $ABC.DEF$ is op te splitsen in een prisma met hoogte 2 en een piramide met hoogte $6 - 2 = 4$.
De oppervlakte van het grondvlak is $\frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$
De inhoud van het prisma is $G \cdot h = 30 \cdot 2 = 60$
De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 4 = 40$
De inhoud van het lichaam $ABD.DEF$ is dus $60 + 40 = 100$
- b** De kegel heeft hoogte $CF = 6$ en straal $r = AC = 12$
De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 6 = 288\pi \approx 905$
- c** De straal a van de oorspronkelijke cirkel is $\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$
De oppervlakte van de kegelmantel is $\pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 12 \cdot \sqrt{180} \approx 506$

bladzijde 177

- T-5a** Kies voor deel I bijvoorbeeld de piramide met als grondvlak de driehoek in het bovenzijde van de kubus. De kubus is halverwege de ribben doorgesneden, dus de twee zijden van de driehoek hebben lengte $12 : 2 = 6$ en de piramide heeft ook hoogte 6. De oppervlakte van het grondvlak is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$. De inhoud van deel I is dus $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$
Deel VI heeft dezelfde afmetingen als deel I en heeft dus ook een inhoud van 36.
- b** Deel I en II samen vormen een vergroting van deel I. Elke zijde is $2 \times$ zo groot.
De inhoud van de grote piramide is dus $2^3 = 8$ keer groter dan van de kleine piramide die uit deel I bestaat.
- c** Inhoud van deel II = inhoud deel I en deel II samen – inhoud van deel I = $8 \times 36 - 36 = 252$
Deel V heeft dezelfde afmetingen als deel II dus ook een inhoud van 252
Deel III en IV hebben dezelfde afmetingen dus ook dezelfde inhoud.

Inhoud deel III en deel IV samen = inhoud kubus – inhoud van de delen I, II, V en VI samen = $(12 \times 12 \times 12) - (36 + 252 + 252 + 36) = 1152$
Deel III en deel IV hebben dus ieder een inhoud van $1152 : 2 = 576$

- T-6a** De zijde van een weggesneden driehoek is $12 : 2 = 6$ cm. De oppervlakte van de vier weggesneden driehoeken is $4 \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 72$ cm². De oppervlakte van het kubusvlak is $12 \times 12 = 144$ cm². De oppervlakte van het grensvlak is dus $144 - 72 = 72$ cm²
- b** Elk driehoekig grensvlak is een gelijkzijdige driehoek met zijde $\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$ cm. De hoogte van de driehoek is $\sqrt{(\sqrt{72})^2 - (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{72})^2} = \sqrt{54}$ cm. De oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{54} \approx 31,2$ cm²
- c** De oppervlakte van de kubo-octaëder bestaat uit 6 vierkanten en 8 driehoeken. De oppervlakte is dus $6 \cdot 72 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{54} \approx 681$ cm²
- d** Inhoud kubo-octaëder = inhoud kubus – $8 \times$ inhoud van een piramide op een hoekpunt = $12 \times 12 \times 12 - 8 \times \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 12 \times 12 \times 12 - 8 \times \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6) \cdot 6 = 1440$ cm³

- T-7a** $KB = \sqrt{0,5^2 + 6^2} = \sqrt{36,25}$ cm
 $KH = \sqrt{4,5^2 + 4^2} = \sqrt{36,25}$ cm
 $HL = \sqrt{6^2 + 0,5^2} = \sqrt{36,25}$ cm
 $BL = \sqrt{4^2 + 4,5^2} = \sqrt{36,25}$ cm
Alle zijden hebben lengte $\sqrt{36,25}$ cm dus zijn gelijk.
- b** 1) Verschuif het vlak $BKHL$ 0,5 cm naar beneden zodat K samenvalt met A . Punt L komt nu 4 cm boven C en KL vormt nu de schuine zijde van $\triangle KCL$.
 $KC = AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ en $KL = \sqrt{KC^2 + CL^2} = \sqrt{52 + 4^2} = \sqrt{68} \approx 8,2$ cm
2) BH is de lichaamsdiagonaal van de balk en heeft lengte $\sqrt{BD^2 + DH^2}$. Met $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ wordt dit $\sqrt{52 + 5^2} = \sqrt{77} \approx 8,8$ cm
- c** De zijden van $BKHL$ hebben gelijke lengte dus $BKHL$ is een ruit. Het is geen vierkant want de diagonalen KL en BH zijn niet gelijk.
- d** oppervlakte $BKHL$ = oppervlakte $\triangle KHL$ + oppervlakte $\triangle KLB$
De diagonalen van een ruit snijden elkaar in het midden, dus de hoogte van $\triangle KHL$ is $\frac{1}{2} \times BH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{77}$. Driehoek KHL en KLB hebben gelijke vorm dus ook gelijke oppervlakte.
Met KL als basis wordt de oppervlakte van $\triangle KHL$ dus $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{68} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{77} \approx 18,1$ cm² en de oppervlakte van $BKHL$ is $2 \times 18,1 = 36,2$ cm²
- e** Het middelpunt van de cirkel die door $ABCD$ gaat ligt in het midden van AC . De straal van de cirkel is dus $\frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} = \sqrt{13}$ cm. De oppervlakte van de cirkel is $\pi r^2 = 13\pi \approx 40,84$ cm² en heeft een omtrek van $2\pi r = 2\pi \cdot \sqrt{13} \approx 22,7$ cm

- T-8a** Een bol met straal r heeft inhoud $\frac{4}{3}\pi r^3$ en oppervlakte $4\pi r^2$
Een kubus met ribbe x heeft inhoud x^3 en oppervlakte $6x^2$ als de inhoud van de bol en de kubus gelijk zijn geldt:
 $\frac{4}{3}\pi r^3 = x^3$
waaruit volgt
 $x = (\frac{4}{3}\pi r^3)^{\frac{1}{3}} = (\frac{4}{3}\pi)^{\frac{1}{3}} \cdot r \approx 1,612 \cdot r$
De ribbe van de kubus moet dus ongeveer 1,612× de straal van de bol zijn om dezelfde inhoud te hebben. De oppervlakte van zo'n kubus is dan
 $6x^2 = 6 \cdot (1,612 \cdot r)^2 = 6 \cdot 1,612^2 \cdot r^2 \approx 15,6 \cdot r^2$
De oppervlakte van de bol is $4\pi \cdot r^2 \approx 12,57 \cdot r^2$
Omdat $15,6 \cdot r^2$ groter is dan $12,57 \cdot r^2$ heeft de kubus de grootste oppervlakte.

- b** De oppervlakte van de kegelmantel is $\pi \cdot r \cdot a$ met $a = \sqrt{r^2 + h^2}$

Als de hoogte verdubbeld wordt terwijl de straal van de grondcirkel gelijk

blijft, verandert h in $2h$ terwijl r zo blijft. De waarde van a wordt dan

$\sqrt{r^2 + (2h)^2} = \sqrt{r^2 + 4h^2}$. Dat is niet te schrijven als een constant aantal keren de oorspronkelijk waarde van $\sqrt{r^2 + h^2}$

De oppervlakte neemt dus wel toe maar niet met een constante factor of waarde.